NÚMEROS REAIS RELATIVOS

Os números negativos apareceram, primeiramente, na China antiga, na tentativa de formular um algoritmo para resolução de equações de segundo grau. O matemático grego Diofanto operava com números negativos, no século III. Em atividades práticas, eram usados com significado de dívida ou débito. Entretanto, até o século XVI, na Europa, os matemáticos negavam a existência destes números. Muitos matemáticos europeus não os apreciavam e, se apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis. Exemplo deste fato seria Michael Stifel (1487- 1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-os de "numeri absurdi". Cardano usou os números negativos embora chamando-os de "numeri ficti" (fictícios).

A partir da metade do século XVII, a partir do rápido desenvolvimento da Álgebra, da Teoria das Equações em particular, e do Cálculo, os matemáticos perceberam que se podia calcular com os números relativos usando a regra usual de sinais. Mas dificuldades teóricas vão gradativamente surgindo. Os matemáticos não conseguiam uma prova para as regras dos sinais que obtivesse uma aceitação universal. Eles procuravam mesmo diferenciar *sinal de número* de *sinal de operação* através, por exemplo, das expressões *negativo/subtrativo* e *positivo/aditivo,* ou pelo uso de símbolos diferentes como $7–3^{+}$ ou $7+3^{-}$.

O passo que os matemáticos demoraram a dar foi o reconhecimento da impossibilidade de deduzir o negativo do positivo; da impossibilidade de o negativo surgir dentro do conceito restrito da operação de subtração. Era preciso ampliar os conceitos de número e de operação. A ampliação do conceito de número pela introdução dos números negativos foi uma conseqüência da necessidade de generalizar a subtração.

Em 1830 o matemático inglês George Peacock (1791-1858) publicava seu "Treatise of Algebra" (ampliado em dois volumes em 1842 e 1847) e estabelecia uma diferença entre *Álgebra aritmética* e *Álgebra simbólica* pela qual ele procurava, particularmente, solucionar a questão da subtração a - b quando a < b. Para Peacock, na Álgebra aritmética, os sinais + e - denotam as operações de adição e subtração apenas em seus significados ordinários, e na Álgebra simbólica, ao contrário, adota as regras da Álgebra aritmética, mas remove todas as suas restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na Álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizados.

O matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873) em seu livro "Theorie der komplexen Zahlensysteme" (1867) percebeu a necessidade de ampliação do conceito de número. Em uma igualdade a + b = c, explica Hankel, a soma c é obtida de a e de b. Ele pergunta então o valor que x deve possuir para que x + b = c. Segundo ele só deve existir um valor para x, o qual ele designa por x = c - b. É evidente que se b > c não existe número na seqüência 1,2,3.... que 8 satisfaz a igualdade, mas pode-se ver a diferença (c - b) como um símbolo que satisfaz a igualdade e que deve ser operado da mesma forma como se fosse um número da seqüência 1,2,3......

Em sua essência o que Hankel fez é o que se encontra hoje nos textos de Álgebra da universidade: organizar formalmente a Álgebra elementar através de axiomas.

As quatro operações elementares realizadas no conjunto dos números reais e todas as suas propriedades operatórias, incluindo a regra dos sinais, bem como a introdução do negativo, são ou explicitamente enunciadas nos axiomas ou facilmente dedutíveis.

Esses axiomas podem, hoje, ser enunciados da forma abaixo:

No conjunto dos números reais existem duas operações **+** (adição) e **.** (multiplicação)

que satisfazem as seguintes propriedades:

A1: Para todo x, y reais, x + y = y + x

A2: Para todo x, y, z reais, x + (y + z) = (x + y) + z

A3: Existe um elemento que é neutro na adição, isto é, chamando esse elemento de 0, vale x + 0 = x, para todo x real

A4: Para cada elemento x real, existe um elemento, representado por (- x), tal que x + (-x) = 0

M1: Para todo x, y reais, x **.** y = y **.** x

M2: Para todo x, y, z reais, x **.** (y **.** z) = (x **.** y) **.** z

M3: Existe um elemento que é neutro na multiplicação, isto é, chamando esse elemento de 1, vale x **.** 1 = x, para todo x real

M4: Para cada elemento x real, não nulo, existe um elemento, representado por x^{-1}, tal que x **.** x^{-1} = 1

D: Para todo x, y, z reais, x **.** (y + z) = x . y + x **.** z

Observemos que essa estruturação sintetiza toda a história envolvendo os números relativos e as suas regras operacionais. A escolha das proposições primitivas da fundamentação axiomática da Aritmética dos números reais acima não é feita de forma arbitrária como pode aparecer em uma primeira vista, é a síntese da História.

Os axiomas registram de forma depurada o resultado de milênio e meio de dúvidas, incertezas, erros, hesitações, tentativas, etc.

Observemos a simetria quase perfeita entre os axiomas para a adição e os axiomas para a multiplicação.

De início eles estabelecem a comutatividade e a associatividade para cada uma das duas operações.

O axioma A3 postula a existência do 0 como elemento neutro. O mesmo faz M3, com relação ao número 1 na multiplicação.

O axioma A4 é de especial importância para a questão do negativo. Reconhece-se a impossibilidade de deduzir o negativo.

O axioma simplesmente postula o negativo definindo-o pela condição $x + (-x) = 0$.

M4 é o correspondente de A4 na multiplicação.

Observemos que o 0 não tem inverso multiplicativo, isto é, não existe divisão por zero.

O axioma D é a distributividade da operação de **.** pela operação de **+**. Ele é necessário porque até então as duas operações estavam completamente independentes uma da outra.

Por fim observemos que só existem duas operações e que não há mais necessidade de falar em *sinal de operação* e *sinal de número*.

A subtração a - b, entre reais é definida como a adição a + (-b) de a pelo inverso aditivo de b :

$a - b = a + (-b)$

Do mesmo modo, a divisão a/b, b não nulo, é definida por $a \, . \, b^{-1}$:

$a/b = a. \, b^{-1}$

Todas as questões que surgem na Aritmética elementar podem ser deduzidas ou explicadas a partir dos nove axiomas.

Mostremos alguns resultados:

Teorema 1:

O elemento neutro da adição, o número 0, é único.

Prova:

Suponha que exista em $\Re$ dois elementos neutros para a adição, 0 e 0*. Adicionando-os obtemos:

0 + 0* = 0 (porque 0* é elemento neutro) = 0* (porque 0 é elemento neutro). Obtemos assim que 0* = 0.

Teorema 2:

O elemento simétrico de um elemento $x \in \Re$ é único.

Prova:

Sejam (-x) e (-x)* dois elementos de $\Re$ tais que x + (-x) = 0 e x + (-x)* = 0.

Temos, então,

(-x)* = (-x)* + 0 = (-x)* + [x + (-x)] = [(-x)* + x] + (-x) = 0 + (-x) = -x

como desejávamos.

Teorema 3:

Se x + x = x em $\Re$ então x é o elemento neutro de $\Re$, isto é, x = 0.

Prova:

Pelo Axioma A4 existe o elemento (-x) em $\Re$. Somando (- x) aos dois membros da igualdade dada obtemos:

-x + (x + x) = -x + x

(-x + x) + x= 0 Axiomas A2 e A3

0 + x = 0 Axioma A2

x = 0 Axioma A3

Teorema 4:

"Zero vezes qualquer número dá zero", isto é, que 0 **.** x = 0, para todo x ∈ $\Re$**.** 1

Prova:

Partimos do primeiro membro da igualdade e aplica-se o axioma A3.

0 **.** x = (0 + 0) **.** x

Usando-se a distributividade, axioma D, obtemos:

$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$

Tendo já sido demonstrado que o elemento neutro 0 é o único elemento x que satisfaz a propriedade $x + x = x$, conclui-se da igualdade anterior que $0 \cdot x = 0$.

Teorema 5:

O simétrico do simétrico de x é x, isto é, $-(-x) = x$.

Prova:

Dado $x \in \Re$ temos $x + (-x) = 0$. Pela comutatividade temos $(-x) + x = 0$, isto é, x é o elemento simétrico de -x (único pelo Teorema 2).

Logo $-(-x) = x$.

Teorema 6:

a) "Menos vezes mais dá menos", isto é, $(-x) \cdot y = - x \cdot y$. e

b) "Mais vezes menos dá menos“, isto é, $x \cdot (-y) = - x \cdot y$.

Prova:

a) $x \cdot y + (-x) \cdot y = [x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y = 0$.

O que mostra que $- x \cdot y = (-x) \cdot y$ (Pelo axioma A4).

Analogamente mostra-se que $- x \cdot y = x \cdot (-y)$

Teorema 7:

"Menos vezes menos dá mais“, isto é, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Prova:

$(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -(-x \cdot y) = x \cdot y$

É essencial que você estude a Apresentação: Números Reais Relativos, para obter mais informações sobre o tema.

ESTE TEXTO FOI BASEADO EM:

NETO, Fernando Raul. **Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais**. Abril de 1995 Publicação Nº 2 Trabalho apresentado na *Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática* promovido pelo Mestrado em Psicologia da Ufpe, realizado entre os dias 27 e 31 de março de 1995 em Recife, Pernambuco.Disponível em: http://www.ufpe.br/filosofia/arquivos/10%20Duas%20ou%20tres%20coisas%20sobre%20o%20menos%20vezes%20menos%20da%20mais.pdf