

## Paradoxos do Infinito

Antonio Zumpano

*Professor de História da Matemática - UFMG*

Em 1851 foi publicado, em língua alemã, um pequeno livro intitulado “Paradoxos do infinito” de autoria de Bernard Bolzano. A publicação foi feita três anos depois de sua morte e trata-se de uma nova e original maneira de abordar o conceito de infinito. Conceito esse que trás consigo inúmeros paradoxos como veremos.

O primeiro infinito que nos deparamos tem sua origem no nosso princípio da contagem; todos nós contamos e ordenamos; um, dois, três..., o primeiro, o segundo..., e a noção de cardinalidade ( quantidade) se confunde com a noção de ordinal. Apesar de não experimentarmos o infinito, podemos discerni-lo, pois ao contar, percebemos através do discernimento, que podemos sempre acrescentar mais um. Essa é a primeira noção de infinito, o infinitamente grande. Quando no século XVII Pascal exclama: “o silêncio desses espaços infinitos me apavora”. Pascal nos mostra a crise provocada pelo renascimento ao contrapor um espaço infinito à cosmologia finita de Aristóteles. A outra noção é o infinitamente pequeno: uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente. Essa noção está relacionada ao conceito de continuidade do espaço, por exemplo, um segmento de reta pode ser subdividido ao meio, cada metade subdividida ao meio e cada parte subdividida novamente ao meio, e assim indefinidamente. Portanto, é bastante razoável e geometricamente intuitiva essa idéia de subdivisão indefinida produzindo um processo infinito. Ligado a esse conceito está a teoria atomística de Demócrito ( 410 a.c. ), segundo a qual uma grandeza é formada por um número muito grande de partes atômicas indivisíveis. Apesar de menos razoável que o conceito de subdivisão indefinida mencionado acima, ele será muito útil em termos práticos e será utilizado por Arquimedes ( 287-212 a.c. ) , por Cavalieri na Itália em 1635, por Kepler em seus cálculos na astronomia e por Leibniz e Newton com a noção de infinitesimais.

Os paradoxos relacionados com o infinito tornaram-se famosos na Grécia e foram muito estudados na Idade Média de modo especulativo e metafísico. Entre esses paradoxos estão os conhecidos paradoxos de Zenão de Eléia (450 a.c.) que chama a atenção para as dificuldades lógicas que aparecem ao lidarmos com o conceito de infinito. Dois deles são:

- A dicotomia : Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorre-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, ad infinitum. Segue-se então, que o movimento jamais começará.

- A flecha : Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Muitas explicações foram dadas para os paradoxos de Zenão. Aristóteles, por exemplo, fez várias considerações a respeito que foram utilizadas na Idade Média para grandes especulações metafísicas sobre a natureza do infinito. A questão é que falta uma linguagem

apropriada para falar do infinito, e o paradoxo causa desconforto porque sua linguagem lógica e coerente nega a realidade que observamos e experimentamos, ou seja, o movimento. Esse desconforto é tamanho que os infinitésimos foram totalmente excluídos da geometria demonstrativa grega. O tipo de racionalismo grego é que na verdade promove os paradoxos. Mas, é esse mesmo racionalismo que os responde. A resposta surge então na escola Platônica em torno do ano 350 a.c. através do método de exaustão creditado a Eudoxo. Esse método foi muitíssimo utilizado por Arquimedes para calcular diversas áreas e volumes. Os resultados de Arquimedes serviram de base na verificação da eficácia do cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton no século XVII. O método de exaustão admite que uma grandeza possa ser indefinidamente dividida e baseia-se no seguinte postulado :

“ Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie”. (ou seja, não sobra nada )

O postulado resolve o primeiro paradoxo de maneira brilhante, mas é um tanto marota, pois o que se faz é simplesmente postular que um determinado processo infinito tem fim e esgota a grandeza inicial. Esse tipo de procedimento era aceito pelo racionalismo grego que se caracteriza pela axiomatização de verdades primeiras das quais todas as outras devem ser deduzidas. Esse é o critério de verdade iniciado por Tales ( 600 a.c. ) e desenvolvido pela escola pitagórica ( 500 a.c.). Temos como exemplo o famoso Teorema de Pitágoras que é verdadeiro porque foi deduzido, demonstrado a partir de premissas axiomatizadas e tidas como verdades primeiras e indeléveis. Esse mesmo teorema era conhecido experimentalmente por inúmeros povos. Mas, para os gregos a verdade não vem da experiência e nem pode ser apreendida pelos nossos sentidos, digamos imperfeitos, que nos remetem apenas ao conhecimento de uma representação grotesca da realidade absoluta. Para ter acesso à luz verdadeira somente pela dedução, ou método axiomático. Isso é uma invenção grega, e nesse aspecto podemos falar que a matemática é uma invenção grega. Ressaltamos que a mesma coisa foi feita por Euclides quando postulou o quinto postulado das paralelas: já que não conseguimos demonstrar, que tal te-lo como postulado da geometria?

Outro grande problema relacionado com o infinito foi a constatação pelos pitagóricos da existência de segmentos incomensuráveis, isto é, que não possuem comprimento, não podem ser medidos, como por exemplo a hipotenusa de um triângulo ( retângulo ) cujos catetos medem um centímetro cada um. Essa impossibilidade não acontece na prática e parece mesmo uma questão impropriedade, pois é claro que podemos medir qualquer segmento, basta ter uma régua. Mas, novamente, o tipo de racionalidade grega produzia esses questionamentos. A constatação foi essa: não existem números suficientes para medir todos os segmentos. Os gregos também não encontraram números para medir a área de um círculo de raio unitário.

Assim, aparece o problema dos números irracionais, incluindo aí o lendário número  $\pi$  ( letra p em grego) que recebeu esse nome no século XVIII em homenagem a Pitágoras que foi o primeiro a perceber o fato absurdo e altamente angustiante que é a insuficiência do sistema numérico, ou do princípio da contagem, mesmo sendo infinitamente grande. No

século XVIII descobriu-se que a suspeita dos gregos era procedente, ou seja, realmente não existe número para medir a área de um círculo de raio igual a um. Por outro lado, intuitivamente e geometricamente é óbvio que deve existir tal número. Acreditando então na existência desse número, os matemáticos do século XVIII o chamaram de  $\pi$ , mesmo sem ter certeza de sua existência. Assim também fizeram com todos os outros números que não existiam, como raiz quadrada de 2 por exemplo, e denominaram esses números de irracionais. (A razão da denominação é o fato de que esses números, se existirem é claro, não são frações, isto é, não são razões de dois inteiros, daí o nome irracional). Cabe aqui lembrar que os números irracionais, existindo ou não, são totalmente dispensáveis na produção de tecnologia, mesmo as mais avançadas e modernas. O que deve ser analisado portanto, e isso cabe às ciências sociais, é se o tipo de racionalidade que produz o questionamento dos irracionais é realmente necessária para gerar desenvolvimento tecnológico avançado, (tecnologia posterior ao século XVII). Como isso é muito duvidoso, vê-se que é meio ridículo colocar referências ao número  $\pi$  em sondas espaciais que procuram por vidas inteligentes fora do planeta. A não ser que estejam procurando gregos no espaço.

A insuficiência do sistema numérico perturbou a racionalidade grega. A escola platônica contornou o problema com a teoria das proporções de Endoxo para tratar os segmentos incomensuráveis descobertos por Pitágoras. Mas não conseguiu resolver a questão, principalmente o da área de círculos. Na Idade Média, inúmeras abordagens metafísicas foram feitas com relação à natureza do infinito. Mas todas elas inócuas. No Renascimento, Cavalieri retoma o velho conceito das partes atômicas indivisíveis abandonado pelos gregos para construir um princípio muito útil no cálculo de áreas e volumes, o conhecido princípio de Cavalieri ensinado nas aulas de geometria da escola básica. Esse princípio foi muito utilizado por Kepler em sua pesquisa do movimento dos corpos celestes. Cavalieri era aluno de Galileu, que expressava claramente a dificuldade de entender ontologicamente o infinito devido aos inúmeros paradoxos. Galileu concluiu que infinito e indivisibilidade são em sua própria natureza incompreensíveis para nós e piorou ainda mais a situação ao observar que os atributos “maior”, “menor” e “igual” não fazem nenhum sentido quando utilizados para comparar quantidades infinitas. Por exemplo, pode-se construir uma correspondência um a um entre os números pares e o conjunto de todos os números inteiros da seguinte forma: a cada número inteiro  $n$  associe o número par  $2n$ . Verifica-se facilmente que essa correspondência é um a um, de modo que não podemos afirmar que temos uma quantidade de números pares menor do que a quantidade total de números. Isso contradiz um axioma básico da racionalidade grega, a saber, o todo é maior que a parte. Temos então outro paradoxo com relação ao infinito e refere-se agora aos conjuntos com infinitos elementos, como o conjunto dos números inteiros.

Estamos portanto no século XVII pós renascentista e início da ciência moderna, com seu método pragmático visando previsibilidade e tecnologia, que é a aliança entre a ciência e a técnica, aliança indispensável para atuar na natureza sujeitando-a. O conhecimento deve agora prioritariamente proporcionar um completo controle dos fenômenos naturais. Os novos mecanismos de dominação apoiam-se nesse controle através da tecnologia. A visão é antropocêntrica e o ser humano é senhor do mundo, o explica e o entende por completo, não depende mais da natureza, mas tem total controle dela. O iluminismo será o ápice desse estado de sentimento. O mercantilismo e a revolução industrial se impõem. Como o saber

deve atender a essa demanda, assistiremos a uma grande atividade do conhecimento matemático a partir do século XVI. O avanço da matemática se deve à necessidade de se obter relações quantitativas entre os diversos conceitos e grandezas emergentes, como força e aceleração, temperatura e pressão, velocidade e tempo, velocidade e distância etc.. Essas relações faziam parte principalmente da mecânica newtoniana recém inventada para dar uma nova interpretação do novo mundo revelado por Galileu. Essa mecânica foi muito bem aceita, pois atendia ao anseio de previsibilidade. Com ela podia calcular o momento e o local exatos da passagem de corpos celestes como cometas, e lembre que nesse paradigma, conhecer é ser capaz de prever.

Dentro desse contexto histórico, a matemática se torna operacional, e o infinito passa a ser tratado de maneira intuitiva tendo como justificativa a funcionalidade. Foi uma época em que os resultados justificavam qualquer procedimento. Quer dizer, qualquer raciocínio é válido, desde que funcione e os resultados possam ser verificados. Com isso, durante três séculos, (XVI, XVII e XVIII ) o método dedutivo grego foi atropelado, ou seja, a racionalidade grega foi atropelada. Newton e Leibniz oficializaram esse atropelo com a teoria dos infinitesimais que culminou no Teorema Fundamental do Cálculo, a grande ferramenta para calcular áreas, volumes e resolver equações diferenciais ( fundamentais para se obter previsibilidade e determinismo, baseiam-se na segunda lei de Newton e na noção de velocidade instantânea. ) Newton e Leibniz lidam com partes atômicas indivisíveis ( infinitésimos) sem nenhum escrúpulo em relação à fundamentação de sua natureza. Em outras palavras, ninguém sabia o que era exatamente um infinitésimo indivisível, mas como o método e o raciocínio funcionavam bem, não se pedia uma fundamentação. Mas, Newton sofreu grande ataque do filósofo e bispo inglês chamado Berkeley que criticava os infinitésimos denominando-os de “fantasmas de quantidades que expiraram”. Outra coisa, o problema dos irracionais não fora ainda resolvido, mas obviamente foi também atropelado.

Esse tipo de comportamento não é de todo ruim, pois alavancou o conhecimento grego que estava estagnado por excesso de zelo com os fundamentos lógicos. ( Era típico dos gregos.) Mas, por outro lado é perigoso, já que não oferece uma segurança lógica quando as situações a serem estudadas ficam mais complexas e os resultados já não são suficientes para justificar procedimentos, muitas vezes inadequados levando a contradições teóricas desconfortáveis. É bom ressaltar que apesar de tudo não se cometeu nenhum erro por falta de fundamentação lógica, e muita coisa foi feita no século XVIII sem essa fundamentação.

O primeiro intelectual a se sentir incomodado com essa falta de rigor foi o enciclopedista D' Alembert , mas ele limitou-se a alertar seus contemporâneos em 1754. Outro matemático preocupado com a falta de rigor foi Gauss no princípio do século XIX.( 1801) Mas também não teve nenhuma iniciativa nesse sentido.

No século XIX essa insegurança causada pela falta de rigor começa realmente a incomodar, e por volta de 1850 já é um consenso a necessidade de uma revisão completa dos fundamentos da matemática. Muitos fatos contribuíram para isso, um dos mais importantes foi o aparecimento das geometrias não euclidianas por volta de 1830 introduzidas pelo matemático húngaro Bolyai e pelo russo Lobashevsky. Essas geometrias colocaram em

dúvida a própria noção de axioma e o sistema hipotético dedutivo característico da racionalidade grega.

A revisão consistia em demonstrar os resultados sem apelar para intuições geométricas espaciais. Para isso seria necessário definir todos os conceitos aritmeticamente, encontrar uma linguagem adequada para lidar com o infinito e definir precisamente o conceito de limite. Essa tarefa começa a ser feita por Cauchy na França e foi levada a cabo pela escola alemã na segunda metade do século XIX. A questão dos irracionais levantada pelos pitagóricos só foi resolvida em 1872 por Cantor e Dedekind independentemente e de duas maneiras diferentes. Esse movimento ficou conhecido como aritmetização da análise. Toda a intuição geométrica foi abolida e as demonstrações eram puramente analíticas, formais e rigorosas, dentro dos princípios do método hipotético dedutivo dos gregos. O problemático infinito é tratado agora com uma linguagem aritmética finitista e a teoria dos conjuntos começa a se impor para formar depois a base dos fundamentos da matemática do século XX.

É nesse cenário que vamos apresentar nosso personagem Bernard Bolzano. Nasceu em Praga no ano de 1781. Filho de imigrante italiano, tornou-se padre e foi professor de religião na Universidade de Praga. Tinha forte inclinação para a lógica e a matemática. Sempre viveu nessa cidade inexpressiva e longe de qualquer centro cultural importante da época. Foi um homem de cultura e língua alemãs e possuía um vasto conhecimento em várias áreas do saber. Faleceu em 1848 e pode ser considerado um precursor da aritmetização da análise, movimento descrito no parágrafo anterior. Em 1817 ele já tinha plena certeza da necessidade de rigor na análise matemática e Felix Klein o chamou posteriormente de “O Pai da Aritmetização”. Infelizmente o trabalho matemático de Bolzano foi grandemente ignorado por seus contemporâneos e vários resultados seus aguardaram ser redescoberto posteriormente.

Bolzano estudou vários exemplos análogos ao paradoxo de Galileu. Parece ter percebido que o infinito dos possíveis números irracionais era de um tipo diferente do infinito dos números naturais, noção primordial que caracteriza a teoria dos números transfinitos criada por Cantor no final do século XIX. No seu trabalho *Paradoxien des Unendlichen* (Paradoxos do Infinito) publicado postumamente em 1851, Bolzano percebe, num verdadeiro lance de gênio, que o paradoxo de Galileu pode ser interpretado como uma propriedade ou característica genuína dos conjuntos infinitos; e é exatamente essa característica que foi fundamental para o estabelecimento do cálculo sobre uma teoria de conjuntos infinitos rigorosamente desenvolvida no final do século XIX. Finalmente, Bolzano foi um gênio abandonado que sozinho desafiou o pavoroso e aterrorizador infinito. Desafiou o Cálculo, cuja gênese encontra-se no passado distante, quando os pitagóricos reconheceram a dificuldade envolvida em tentar substituir considerações numéricas por magnitudes geométricas supostamente contínuas.

Antônio Zumpano