Desvendando os Números Reais

Cristina Cerri
IME-USP
Novembro de 2006

Para que servem os números?

Certamente muitos responderão rapidamente que os números servem para contar. Contudo, se o homem vivesse isolado, a necessidade de efetuar contagens diminuiria muito. Alguns povos primitivos não sentem a necessidade de registrar quantidades grandes. Por exemplo, há tribos na África Central que não conhecem números maiores que 10000. Assim, a vida em sociedade, o estabelecimento do regime de propriedades, as relações comerciais levaram o homem a criar formas práticas de registrar qualquer quantidade, de manipulá-las e de registrar medidas de grandezas.

Percebemos que para nossas tarefas diárias usamos apenas os números inteiros e racionais. Surgem, porém, problemas mais abstratos e teóricos envolvendo, por exemplo, o próprio conceito de medida. Discussões sobre tais temas eram comuns na Grécia antiga (séc. IV a.C.). Matemáticos gregos se perturbaram com problemas envolvendo grandezas não comensuráveis. Muito tempo se passou para que tais questões fossem retomadas. No século XVII, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral intensifica a discussão de certos conceitos, como do "contínuo", ou seja, o de grandezas que variam continuamente. Foi necessário rever os conceitos de números usando bases matemáticas sólidas. E assim os números reais foram finalmente desvendados.

Neste curso vamos procurar compreender as características dos números reais e discutir algumas questões do ensino destes assuntos.

No texto os números inteiros são elementos do conjunto **Z** ={..., -2,-1,0,1,2,...} e os inteiros positivos são os números naturais {0,1,2,...}. Como é usual denotamos por **Q** o conjunto dos números racionais, ou seja, o conjunto dos números da forma n/m, com m e n números inteiros e m não nulo.

A noção de "medir".

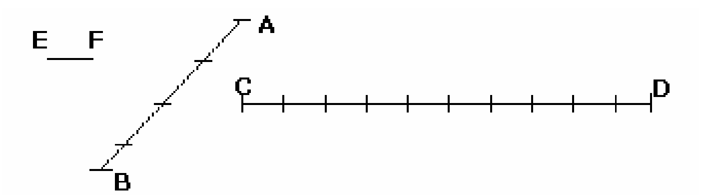
Essencialmente "medir" é comparar: estabelecemos uma unidade fixa de uma grandeza e procuramos encontrar quantas desta unidade são necessárias para obter toda a quantidade da grandeza que temos. Claro que, freqüentemente, não possuímos quantidades inteiras da unidade. Precisamos de **frações** ou partes da unidade para representar a quantidade que temos.

Assim para medir precisamos de números que represente a medida de uma grandeza, dada uma unidade fixada. Vamos pensar nos segmentos de uma reta. Desejamos medi-lo, ou seja, atribuir a este segmento um número. Portanto queremos que a todo segmento tenhamos um número associado. Seriam os números racionais suficientes para medir todo segmento?

Segmentos comensuráveis

Os matemáticos gregos tratavam a questão da medida usando o conceito de grandezas comensuráveis, que significa "medidas simultaneamente". Vamos ver o que significa isso no caso de segmentos da reta.

Considere dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e denote por AB e CD os seus comprimentos respectivamente. Se existem números inteiros positivos m e n e um segmento $\overline{EF}$, tais que AB = mEF e CD = nEF então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos **comensuráveis.**



Na notação de hoje escreveríamos que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m\,EF}{n\,EF} = \frac{m}{n}$$

Note que os gregos não usavam "frações". Eles tratavam apenas das "razões" entre grandezas da mesma espécie (número "racional" vem daí). Eles diriam que "AB está para CD", assim como "mEF está para nEF".

É razoável pensar que para quaisquer dois segmentos sempre seria possível obter EF, m e n. Contudo os gregos, mais precisamente os *pitagóricos*, descobriram algo perturbador: existiam grandezas não comensuráveis

A Crise: a existência dos incomensuráveis

Em Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália, Pitágoras, nascido por volta de 572 a.C., fundou a famosa *escola pitagórica* voltada ao estudo de filosofia, matemática e ciências naturais. Uma irmandade permeada de ritos secretos e cerimônias. Os *pitagóricos*, ao que tudo indica, foram os responsáveis por um dos momentos mais críticos da matemática: a prova de que há segmentos não comensuráveis, os chamados ***incomensuráveis***. Vejamos uma demonstração moderna desse fato.

Atividade.

(a) Primeiramente mostremos um fato geral. Mostre que se n é um número inteiro positivo então n^2 é um número par se, e somente se, n é um número par.

(b) Desenhe um quadrado ABCD. Segue do Teorema de Pitágoras que $AC^2 = 2\ AB^2$. Se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são comensuráveis então existem inteiros positivos m e n tais que AC/AB = m/n. Vamos eliminar os múltiplos comuns de m e n na representação da fração m/n. Sabemos, que existem **p e q primos entre si** tais que AC/AB = p/q. Temos, então uma fração irredutível p/q tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Assim, temos que $p^2=2q^2$. Dessa igualdade concluímos que p^2 é um número par. Usando (a) mostre que p=2k, para algum k inteiro positivo. Usando (a) novamente obtenha que q é um número par. Perceba a contradição e escreva a conclusão.

Podemos imaginar a consternação que esta descoberta provocou entre os pitagóricos, já que ela perturbava a filosofia básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros. *"Tão grande foi o escândalo lógico que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto."* (Eves, pág 107)

A diagonal e o lado de um quadrado não é, evidentemente, o único par de segmentos incomensuráveis. Acredita-se que esse foi o primeiro par de segmentos incomensuráveis descoberto. Existe uma vertente que defende a tese de que a descoberta dos incomensuráveis está relacionada ao pentagrama, que é o símbolo dos pitagóricos, pois a razão entre o lado de um pentágono regular com a sua diagonal resulta na *razão áurea* que é dada pelo número $(\sqrt{5}+1)/2$, conhecido como **número de ouro.**

Atividade. Vamos mostrar que não existe um número racional r tal que $r^2 = 5$. Suponhamos que existam números inteiros positivos p e q tais que $(p/q)^2 = 5$. Já vimos que podemos supor que p e q são primos entre si. Então $p^2=5q^2$, ou seja 5 divide p^2.

(a) Mostre que 5 divide p.

(b) De (a) temos que p = 5k. Mostre que 5 divide q^2 e usando o mesmo argumento anterior mostre que 5 divide q.

(c) Perceba a contradição e escreva a conclusão.

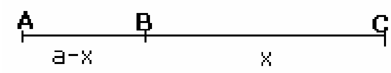
Agora mostre que o número $(\sqrt{5}+1)/2$ não é racional, isto é não é da forma n/m.

Atividade.
(a) É possível provar, usando os mesmos argumentos da atividade anterior, que dado qualquer número primo p não existe r racional tal que $r^2 = p$. Tente!
(b) Mostre que não existe r racional tal que $r^3 = 2$ (ou seja, $\sqrt[3]{2}$ não é racional).
(c) Mostre que não existe r racional tal que $r^2 = 6$

O Número de Ouro

Temos uma infinidade de maneiras de dividir um segmento AB em duas partes. Existe uma, no entanto, que parece ser a mais agradável à vista, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, um matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio: *"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo".*

Ele estava falando da **razão áurea**, estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides de Alexandria que descreveu esta seção em sua proposição "*dividir um segmento de reta em média e extrema razão*". Diz-se que o ponto B divide o segmento AC em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o segmento todo e o maior, isto é , BC/AB = AC/BC. Usando a notação moderna, podemos escrever esta relação assim:



$$x / (a-x) = a / x \Rightarrow x^2 = a^2 - ax \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Cujas raízes são

$$x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_2 = -\left(a\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

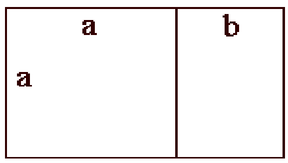
Como x é a medida de um segmento descartamos a raiz negativa, logo

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

e a razão é

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{x} = \frac{a}{a(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618033$$

O valor da razão descrita acima muitas vezes é chamado de φ (Phi) ou ainda de **número de ouro.** Os gregos consideraram que o retângulo cujos lados apresentavam esta relação apresentava uma especial harmonia estética que lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerado a forma visualmente mais equilibrada e harmoniosa.



$$\frac{(a+b)}{a} = \varphi$$

Geralmente a razão é denotada pela letra grega Phi que é a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto encarregado da construção do Parthenon, em Atenas. Construído entre 447 e 433 a.C., o Parthenon Grego ou o Templo das Virgens, templo representativo do século de Péricles e uma das obras arquitetônicas mais admiradas da antiguidade, contém a Razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura / Altura). Esta razão está presente também na fachada da Catedral de Notre Dame (em Paris) e a Basílica de Santa Maria Novella (em Florença).

Coincidentemente ou não, o número de ouro está presente em muitos lugares que despertam a nossa experiência estética. Em produções ligadas à arte, principalmente na pintura, como nas obras renascentistas de Leonardo da Vinci, a exemplo do quadro Mona Lisa. Desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um Retângulo de Ouro. Dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro. As dimensões do quadro também representam a razão de Ouro. Há indícios de que do século V a.C. ao Renascimento a arte tomou como critério estético, o número de ouro. Este está presente até no rosto humano e animal, pois é a razão entre o comprimento do rosto e a distância entre o queixo e os olhos.

Até hoje não se conseguiu descobrir a razão de ser da beleza que proporciona o número de ouro. Mas a verdade é que existem inúmeros exemplos onde o retângulo de ouro aparece. Até mesmo no nosso cotidiano, encontramos aproximações do retângulo de ouro, por exemplo, no caso dos cartões de crédito, nas carteiras de identidade, nos cartazes de publicidade, nas caixas dos cereais e fósforos, assim como na forma retangular da maior parte dos nossos livros e até nos maços de cigarro.

Eudoxo e a solução para a crise

A descoberta da existência de segmentos incomensuráveis abalou profundamente as convicções dos pitagóricos. Eles logo perceberam que demonstrações de importantes resultados, como o Teorema de Tales, estavam incompletas! Isso era grave, já que muitos fatos fundamentais da Geometria dependem do Teorema de Tales.

Foi um matemático grego chamado Eudoxo, um discípulo de Platão, que, por volta de 370 a.C., resolveu de forma brilhante o problema criando a Teoria das Proporções, que pode ser encontrada no livro V dos Elementos de Euclides. Na linguagem matemática atual, podemos expressar a definição de Eudoxo da seguinte forma: *a/b = c/d ("a está para b" assim como "c está para d") se, e somente se, dados inteiros m e n então:*

1) *ma < nb se, e só se, mc < nd*
2) *ma = nb se, e só se, mc = nd*
3) *ma > nb se, e só se, mc > nb*

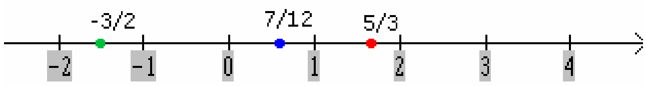
Com esta definição de Eudoxo, passou a ser possível tratar também de grandezas *incomensuráveis*. Assim pode-se provar o Teorema de Tales para todos os casos. Observe que na maioria dos livros didáticos a prova do Teorema de Tales, quando aparece, está incompleta, sendo feita apenas para o caso de segmentos comensuráveis, que é muito mais fácil.

Apesar da grande contribuição de Eudoxo, é possível que este tratamento geométrico dado para o problema atrasou o desenvolvimento de novos campos numéricos. Afinal a questão de se obter um número associado a cada segmento, representando sua medida, não foi tratado de forma direta. Somente muito tempo depois, a questão foi retomada e definitivamente resolvida.

Expandindo o conjunto dos números racionais

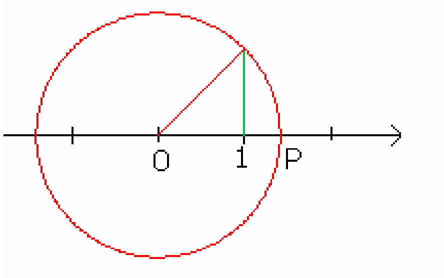
Já percebemos que com os números racionais não se pode obter a medida todo segmento de reta. Deseja-se encontrar números que representassem a medida de qualquer segmento da reta. Portanto procura-se então um conjunto de números que tivesse uma "bijeção" com os pontos da reta.

Note que, dada uma reta e um "referencial", isto é, um ponto que chamamos de "origem" e uma unidade (de medida), estabelecemos um sentido positivo e temos uma *reta orientada*. Nesta reta pode-se facilmente **associar a cada número racional um ponto**. Veja os exemplos abaixo

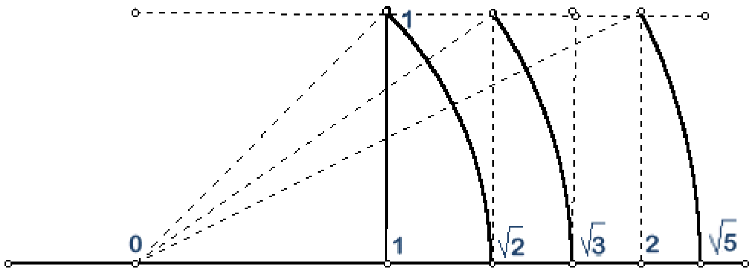


Esta é a chamada ***reta real***. Convém lembrar que se demorou muito tempo para se aceitar e se incorporar aos conjuntos numéricos os números negativos e o 0. Mas vamos daqui pra frente admitir a existência dos números negativos.

Uma construção simples com régua e compasso (veja abaixo) nos permite encontrar um ponto P associado a diagonal do quadrado de lado 1 e sabemos que não há um número racional que represente este ponto. Então **nem todo ponto tem um número racional correspondente.**



E este não é o único exemplo! Veja a construção abaixo:



Uma observação: a *reta* a que nós nos referimos aqui é um objeto geométrico abstrato e estamos admitindo certos axiomas da geometria.

Se cada número racional tem um ponto associado e vice e versa, devem existir números para representar os outros pontos. Naturalmente eles foram chamados de números *irracionais*. O conjunto dos *números reais* é a coleção de todos os números racionais e irracionais. Assim "por decreto" os números reais foram criados. Mas precisamos ter uma *representação* para poder somar, subtrair, multiplicar, dividir e comparar tais números, da mesma maneira que fazemos com os números racionais.

Representando números

Para representar as diversas quantidades usamos um sistema posicional de base 10. Os primeiros sistemas de numeração, como o egípcio, o hebraico, o grego e o romano se baseavam principalmente no princípio aditivo e de agrupamento

(IX ou MXI). A invenção do sistema posicional é atribuída aos sumérios e babilônios, sendo desenvolvida pelos hindus. A utilização de 10 como base é sem dúvida conseqüência do fato de termos 10 dedos. Outras bases foram usadas, cujos vestígios estão presentes nas unidades de medida de tempo ou de ângulo. Devemos, sobretudo, aos hindus e aos árabes a invenção e a divulgação da forma de escrita dos números que usamos hoje.

Usamos a representação no sistema decimal para escrever os números inteiros. Não haveria uma maneira de usar o mesmo sistema para representar os números racionais?

Sabemos que no sistema decimal posicional os algarismos ganham um diferente valor, que é múltiplo de 10, dependendo da sua posição. Cada posição da esquerda para direita corresponde a um grupo 10 vezes menor que o anterior. Se continuarmos uma casa a direita da cada das unidades, ela deve representar uma quantidade 10 vezes menor, ou seja, representar o "décimo". Ou seja, se um número inteiro é descrito com potências positivas de 10 (por exemplo: $70.300.041 = 7+10^7 +3.10^5+4.10^2+1$) usamos as décimas partes da unidade,

$$1/10,\ 1/10^2,\ 1/10^3,\ 1/10^4\ ...,$$

que são potências negativas de 10, para representar as frações. E convencionamos escrever

0,1 para 1/10
0,01 para $1/10^2$
0,001 para $1/10^3$
e assim por diante.

Portanto no nosso sistema de representação decimal

$$360,9207 = 3.10^2 + 6.10 + 9.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 7.\frac{1}{10^4} = \frac{3609207}{10^4}$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5\ ,\quad \frac{3}{40} = \frac{75}{1000} = 0,075\ ,\quad \frac{69}{80} = \frac{8625}{10000} = 0,8625$$

Vale notar que esta simples idéia demorou muito para ser definitivamente adotada. Os babilônios, que usavam um sistema posicional sexagesimal (de base 60) estenderam sua escrita para formas fracionarias $1/60$, $1/60^2$. etc. Outros povos, como os hindus, usavam representações para frações com dois símbolos, como numerador e denominador. Só muito tempo depois, já no século XVI, a notação de fração num sistema posicional foi retomada ou reinventada, com a separação entre parte inteira e fracionária. Em 1585, Stevin, faz um tratado sobre frações decimais e Napier, num trabalho de 1617, usa amplamente o ponto para separar a parte inteira dos décimos.

Acima descrevemos maneiras de converter números na representação decimal para a representação fracionária. Também partindo de números escritos na forma fracionária, obtivemos sua representação decimal. Mas será que podemos representar TODOS os números racionais dessa maneira?

Representação decimal finita dos números racionais

Claramente todo número racional da forma $b/10^n$, onde b é um número inteiro qualquer, pode ser escrito na forma decimal. Por exemplo, se b for menor que 10^n e se b, na forma decimal, é $b_1b_2b_3b_4..b_k$, onde b_i são algarismos de 0 a 9, para cada i de 1 a k, então

$$\frac{b}{10^n} = 0{,}00...0b_1b_2b_3...b_k$$

cuja representação decimal tem exatamente n casas decimais.

As representações da forma $a_1a_2a_3a_4..a_n,b_1b_2b_3b_4..b_k$, onde a_j e b_i são algarismos de 0 a 9, para cada i de 1 a k e j de 1 a n, são chamadas de **representações decimais finitas.**

Será que TODO número racional pode ser representado com este tipo de forma decimal? Antes de responder examinemos um exemplo:

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10000} = \frac{69}{80}$$

Obteve-se o denominador 80 dividindo 10000 por 125, que também é divisor de 8625. Note que a fração 69/80 é *irredutível*, isto é, 69 e 80 não têm divisores em comum (são primos entre si). E 80 e 10000 têm somente dois fatores primos na suas decomposições: 2 e 5.

Se, ao contrário, começarmos com uma fração irredutível a/b tal que na decomposição de b em fatores primos só aparecem os fatores 2 e 5, então conseguiremos uma representação decimal finita de a/b. Veja estes exemplos:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = 0{,}6$$

$$\frac{41}{20} = \frac{41}{2^2.5} = \frac{41 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{205}{100} = 2{,}05$$

Isto foi possível pois qualquer potência de 10, ou seja os números 10^n , só possuem os fatores primos 2 e 5 na sua decomposição: $10^n = 2^n.5^n$. Sendo assim, se na decomposição do denominador da fração p/q aparecem fatores diferentes de 2 e 5 então p/q não tem representação decimal finita.

Concluindo: dada um número racional p/q , onde p e q são primos entre si, ele tem uma representação decimal finita, se, e somente se, na decomposição de q em fatores primos só aparecem os fatores 2 e 5, isto é, $q=2^k5^m$.

Representação decimal infinita periódica

Naturalmente surge a questão: como, então, representar, na forma decimal, os outros números racionais? Será que existe representação decimal para números como 1/3, 7/5, 12/37, etc.?

Quando queremos escrever 7/4 na forma decimal escrevemos a fração 175/100 que transformamos em 1,75. Mas também podemos fazer a divisão de 7 por 4. Assim procuramos primeiro saber quantas 4 unidades "cabem" em 7: temos 1. Mas sobram 3 unidades para se dividir em 4. Mas podemos pensar em 3 como 30 décimos. Encontramos 7 décimos de 4 e sobram 2 décimos para serem divididos por 4. Analogamente, transformamos 2 décimos em 20 centésimos para serem divididos por 4.

E quando este processo não termina? Dividindo-se 1 por 3 obtemos sempre resto 1. Faz sentido escrever 1/3 = 0,33333...? Qual o sentido de infinitas casas decimais?

Poderíamos escrever que

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}33 + 0{,}333 + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

Temos do lado direito uma "soma infinita". É claro que uma soma infinita é tão estranha quanto uma representação decimal infinita. Só que este tipo de soma é especial: está relacionada com progressão geométrica (P.G.).

Atividade. Uma *progressão geométrica* é uma seqüência de números não nulos, onde qualquer termo (a partir do segundo), é igual ao antecedente multiplicado por uma constante. Essa constante é denominada ***razão da progressão***, que indicaremos por **q**. Assim a seqüência de números é da forma $(a, a.q, a.q^2, a.q^3,\ldots)$ representa uma PG.

(a) Mostre que se $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + a\,q^n$, então

$$S_n = a\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

(b) Tomando-se a razão q entre –1 e 1 ($-1<q<1$) pode-se mostrar que q^{n+1} "tende a" 0 (ou q^{n+1} vai para 0) quando n "vai para infinito". Significa que q^{n+1} fica cada vez mais próximo de zero, à medida que n aumenta. Mostre que nesse caso

$$S_n = \frac{a}{1 - q} + \frac{aq^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{1 - q}$$

Logo em uma PG infinita dizemos que a soma infinita dos termos da PG é **a/(1-q).** E escrevemos que

$$S = a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1 - q}$$

(c) Obtenha a soma dos infinitos termos da PG com a=3 e q=1/8 . Idem para a=3/10 e q = 1/10.

As representações decimais infinitas como vimos acima são chamadas de periódicas, pois periodicamente um grupo de algarismos se repete. Mas dada uma representação decimal infinita e periódica, ou seja uma chamada dízima periódica, ela é a representação de um número racional? Vejamos um exemplo. Considere a representação

$$x = 1{,}2454545...$$

que é a soma infinita

$$x = 1 + \frac{2}{10} + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \frac{45}{10^9} + \cdots$$

Isso envolve a soma de uma PG. Infinita de razão $1/10^2$. Portanto fazendo os cálculos a soma acima dá um número. Obteremos assim x na forma de fração.

Há uma forma alternativa mais simples de se obter x. Note que os algarismos começam a se repetir a partir da segunda casa decimal, com o algarismo 4. Vamos multiplicar o número por 10:

$$10.x = 12{,}454545...$$

Agora, vamos multiplicar o mesmo a por 10^3:

$$10^3.x = 1245{,}454545...$$

Se subtrairmos o maior do menor, ela irá cancelar:

$$10^3.x - 10.x = 1245{,}45... - 12{,}45... = 1233$$

Logo, 10.x (100 – 1) = 1233 e, portanto, x.990 = 1233. Logo,

$$x = \frac{1233}{990}$$

Com esse método obtemos sempre uma representação em fração de uma dízima periódica.

Atividade. Mostre que 0,999...= 1. E que 2,5 = 2,4999... e 1,48 = 1,47999...

Há um grande incômodo nas igualdades do tipo 1/9 = 0,111.... Convém ressaltar que a igualdade apenas informa que *temos duas representações do mesmo número.*

Note que a notação com os "pontinhos" não é precisa. Quando se escreve 0,333... pressupomos que o algarismo 3 se repete indefinidamente. Se escrevemos 0,7122312... como saber se há repetição? E quais algarismos se repetem? Assim uma notação mais utilizada é a barra sobre os algarismos que se repetirão formando a *dízima periódica*.

Atividade. Escreva $12{,}31415\overline{723}$ na forma a/b.

Atividade. Responda, justificando a resposta.
(a) A representação decimal de 3/17 é infinita e periódica?
(b) O número cuja representação decimal segue o seguinte padrão 0,10110111011110111110... , é racional?

Será que todo número racional a/b tem uma representação decimal finita ou infinita periódica?

Vejamos o que acontece quando dividimos 5 por 11. Dividindo 50 por 11 (para encontrar a 1^a casa decimal) encontramos o quociente 4 e resto 6. Fazemos então a divisão de 60 por 11 para obter a segunda casa decimal. Encontramos o quociente 5 e resto 5. Daí fazemos a divisão de 50 por 11, que já fizemos, cujo resto é 6. Os únicos restos que aparecem são 6 e 5. Assim 5/11 = 0,4545...

Vejamos outro exemplo: fazendo a divisão de 4 por 7 obtemos 4/7 = 0,571428571428... Observe que, nesse caso, os restos da divisão são 5, 1, 3, 2, 6 e 4, nesta ordem. Quando chegamos ao resto 4 iremos dividir 40 por 7, que já fizemos. O próximo resto será 5 e os próximos restos serão aqueles que já apareceram e na mesma ordem!

Lembre que em qualquer divisão de a por b (a>b) vale que a=qb+r, onde o resto r deve ser sempre menor do que o divisor. Portanto r só pode ser 0,1,2,3,... ou b-1.

Logo o resto da divisão por 7, só pode ser 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. O resto da divisão por 11 só pode ser 0, 1, 2, ... 9 ou 10. Assim os restos terão que se repetir.

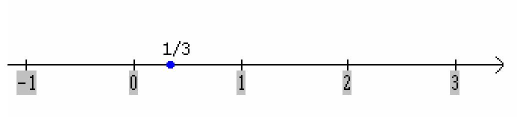
Generalizando, se p/q for um número racional escrito em sua forma irredutível, e se o denominador q tiver outros fatores primos além de 2 e 5, sua representação decimal será uma dízima, pois na divisão de quaisquer números por q, os únicos restos possíveis serão 1, 2, ..., (q –1) — uma quantidade finita de possibilidades. Com isso, teremos certeza de que, em algum momento, um determinado resto irá se repetir e, a partir daí, todo o algoritmo irá se repetir, resultando assim uma dízima periódica.

Concluímos que **a representação decimal de qualquer número racional ou é finita, ou é infinita e periódica,**

também chamada de dízima periódica.

Representação decimal os números reais

É fácil localizar o ponto 1/3 na reta real



A representação decimal de 1/3 é 0,33333... (infinita e periódica). Escrevendo

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

percebemos que 1/3 é uma “soma infinita”. Se marcarmos os pontos correspondentes a

0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333 ; 0,33333 ; ...

na reta real, obteremos uma seqüência de pontos que converge para o ponto 1/3.

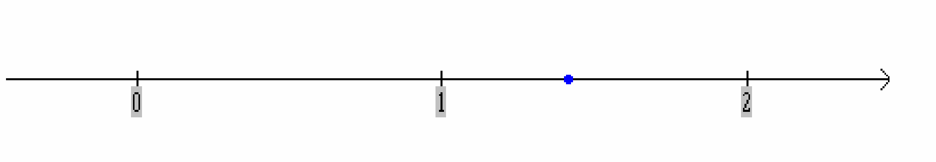
Isso significa que **tão perto quanto se queira de 1/3 existe um número da forma 0,33...3**, onde a quantidade de casas decimais vai depender do quão perto se deseja.

A mesma coisa ocorre com a representação decimal infinita de 1 que é 0,999...: a seqüência de números (0,9;0,99;0,999;0,9999,...) converge (se aproxima de) 1.

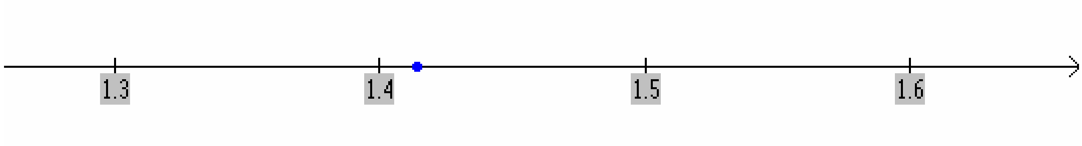
Podemos generalizar: todo número racional **r** pode ser aproximado por números da forma $a/10^n$, ou seja há uma seqüência infinita de números da forma $0,a_1a_2...a_k$ que **converge** para **r**.

Por outro lado, se escolhermos um ponto P da reta que corresponde a um número irracional ***s*** existirá uma representação decimal para tal número?

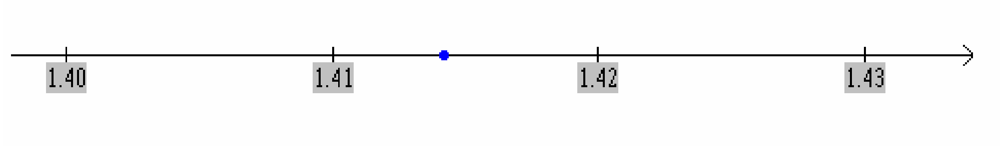
Tomemos o ponto P que corresponde ao $\sqrt{2}$ (o ponto azul nas figuras abaixo). Como $1^2 < 2 < 2^2$ temos que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.



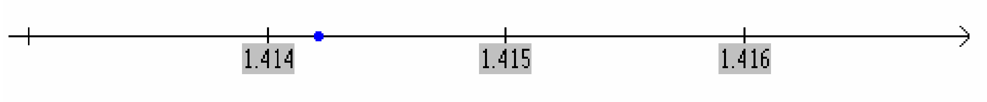
Vamos procurar melhores aproximações de $\sqrt{2}$. Como $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$ (faça os cálculos e verifique!) então $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.



Novamente, fazendo mais cálculos percebemos que $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$ e então $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.



E mais, podemos calcular e ver que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$, e então $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

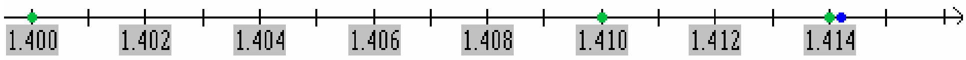


Podemos então perceber que sempre podemos obter melhores aproximações de $\sqrt{2}$, bastando dividir os intervalos em partes iguais de tamanho $1/10^k$. *E esse processo é infinito!!!!*

Note que, os números racionais

(1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 ; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; 1,41421356; ....)

formam uma seqüência de números que “converge”, para $\sqrt{2}$. Os números desta seqüência são aproximações de $\sqrt{2}$ da forma $b/10^n$. Note que a seqüência é formada por números menores que $\sqrt{2}$, e que é uma seqüência crescente.



Nada impede que se repita o processo acima descrito para todo número irracional ***s*** (ponto da reta real). Assim podemos intuir que **existe uma representação decimal de *s*.**

A representação decimal de um número irracional *s* tem que ser infinita e não periódica, pois só os números racionais têm representação finita ou infinita e periódica.

Construindo os números reais

Vimos que todo ponto da reta real, ou seja, todo número real tem uma representação decimal infinita sendo que se o número é racional a representação é infinita e periódica e se o número é irracional ela é infinita e não periódica.

Invente uma representação decimal qualquer. Ela representa um número real? Vamos ver um exemplo: consideremos o decimal **0,1212212221...** . (é um decimal infinito cujas casas decimais só tem 1 e 2 conforme um padrão: aumenta-se a quantidade de 2 separados por 1). Este é um decimal infinito e não periódico. *Existe um ponto Q da reta cujo número associado tem esta representação?* Vamos tentar responder.

Tome a seguinte seqüência de números:

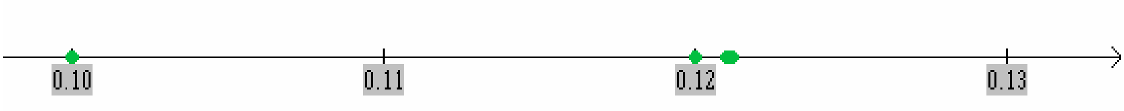
0,1 ; 0,12 ; 0,121 ; 0,1212 ; 0,12122 ; 0,121221 ; 0,1212212 ; 0,12122122 ; etc ...

A seqüência é *crescente* e nunca ultrapassa 0,13. Também não ultrapassa 0,122. Ou ainda não ultrapassa 0,1213 etc. A diferença entre os termos vai ficando cada vez menor. De fato, a diferença entre dois números consecutivos é sempre menor que $2/10^n$ =0,0...02. Veja

0,12-0,1=0,02

0,121-0,12=0,001

0,1212-0,121=0,0002
etc



Nossa *intuição* nos diz que esta é uma seqüência de números racionais que converge para um número ***s*** (um ponto da reta real). E o número ***s* só pode ser o número representado por 0,121221222122221... , com infinitas casas decimais!**

O argumento que usamos pode ser repetido para toda e qualquer forma decimal infinita que você inventar, mesmo que ela não tenha uma regularidade (como é o caso do exemplo acima). Portanto **toda forma decimal infinita (periódica ou não) representa um número real.**

O que estamos afirmando é que sempre existirá um ponto na reta real, ou seja um número real, para onde converge uma seqüência crescente e limitada de números da forma $b/10^n$.

Informalmente, dizemos que *o conjunto dos números reais não tem buraco*. Quando dizemos isso queremos traduzir uma idéia de *continuidade* ou de ***completude.*** E este é um dos conceitos mais difíceis e abstratos da Matemática, cujo mistério foi desvendado por matemáticos como Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916).

Para Cantor a completude ou a continuidade dos números da reta real se traduz da seguinte forma: toda seqüência de números reais convergente tem limite, ou seja, o limite é um número real. A idéia de Cantor foi sugerida pelo que vimos anteriormente de que números reais podem ser considerados como decimais infinitas e decimais infinitas são limites de decimais finitas (números racionais).

Libertando-se do sistema decimal, Cantor afirmou que no conjunto dos números reais toda seqüência de números racionais (a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; ...) que convergir, ou seja, a diferença entre os termos da seqüência vai diminuindo ((a_n-a_m) tende a 0 a medida que n e m aumentam) terá o limite no conjunto dos números reais.

Dedekind, contudo, inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo. Na definição de Eudoxo separa-se a fração m/n em três casos: na > mb ou na = mb ou na< mb. Assim Dedekind pensou em separar as frações em duas classes: aquelas com na < mb e as com na > mb. A este par de classes ele deu o nume de "corte". Ele afirmou que o princípio da completude ou da continuidade está no fato de que toda vez que "cortamos" a reta em dois pedaços **A** e **B** existe um ponto que P que produz tal "corte" da reta e a separa em duas partes.

Propriedades dos números reais

Sabemos que o conjunto dos números racionais, denotado por **Q**, é o que chamamos de **corpo ordenado:** as operações de adição e multiplicação de números racionais fornecem números racionais que satisfazem determinadas propriedades e temos uma relação de ordem neste conjunto, compatível com as operações. O conjunto dos números racionais foi aumentado e temos agora o conjunto dos números reais. O conjunto dos **números reais**, denotado por **R**, é a união dos números racionais com os irracionais. Podemos ainda operar com estes "novos" números como fazemos com os racionais? Como definir agora adição e multiplicação? Os números reais formam também um corpo ordenado?

Não é nada fácil operar com as representações decimais. Vejamos esta soma

1,13234567898765453236272618377...
+ 2,985478930764534263748668459599987656...
4,11793..

Não há como conhecer todas as casas decimais de alguns números. O algoritmo da multiplicação aplicado em decimais infinito fica bem complicado. E quando misturamos racionais e irracionais acontecem coisas incríveis.

Queremos definir operações em **R** que estendam as operações de adição e subtração definidas em **Q**. Isso não é tão simples quanto parece. Contudo os matemáticos de fato provaram que no conjunto dos números reais **R** construído anteriormente estão definidas operações de adição e multiplicação que estende as de **Q.** Também temos uma ordem nas mesmas condições o que permite afirmar que **R é um corpo ordenado.**

Atividade. O conjunto dos números irracionais pode formar um corpo? Analisemos o que acontece quando operamos com estes números.
(a) A soma de um número racional não nulo por um irracional é sempre um número irracional?
(b) O produto de um número racional não nulo por um irracional é sempre um número irracional?
(c) Se a e b forem números irracionais então a+b é ser um número irracional?
(d) Se a e b forem números irracionais então a.b é um número irracional?

Quantos irracionais existem?

Será que há tantos números irracionais quanto racionais? Esta pergunta parece estranha pois já sabemos que existem infinitos números racionais e irracionais. Como então falar de "quantidade" de infinitos elementos?

Matemáticos perceberam que há "qualidades" diferentes de infinitos. Mas especialmente o matemático G. Cantor que se dedicou (praticamente criou) à Teoria dos Conjuntos, desvendou o mistério. Vamos entender melhor esse conceito.

Dizemos que as poltronas de um teatro são *numeradas*. É freqüente se usar letras e números para tal (fila J cadeira 13, por exemplo). Também os carros de uma cidade são enumerados, pois recebem uma placa formada por letras e números. Assim também se pensou em fazer com o conjunto de números. Percebeu-se que os números inteiros (que se denota por **Z**) podem ser "enumerados".

Portanto enumerar é estabelecer uma correspondência bijetora entre os números naturais **N** e os elementos do conjunto.

Percebeu-se que os números inteiros (que se denota por **Z**) podem ser "enumerados". Veja como:

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Número inteiro	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	...

Como existem infinitos números naturais a enumeração apresentada é possível: todos os números inteiros terão uma posição na "fila". Portanto o conjunto **Z** dos números inteiros é dito **enumerável.**

É mais surpreendente que o conjunto dos números racionais **Q** é também enumerável. Vejamos como estabelecer uma enumeração.

Vamos tomar os racionais positivos. Se estabelecermos uma enumeração destes poderemos enumerar todos os números racionais procedendo como foi feito acima com os números inteiros.

Procedamos, então, da seguinte maneira: vamos agrupar todos os números racionais positivos de modo que, em cada grupo, a soma dos termos (numerador e denominador) da fração irredutível que o representa seja a mesma; todo número que já figura num grupo anterior será retirado:

1º grupo : soma 2 : $\frac{1}{1}$

2º grupo : soma 3 : $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$

3º grupo : soma 4 : $\frac{1}{3}, \frac{3}{1}$ (elimina-se o 2/2 = 1, que já apareceu)

4º grupo : soma 5 : $\frac{1}{4}, \frac{4}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

5º grupo : soma 6 : $\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$ (elimina-se o que já apareceu)

etc

Coloquemos agora estes grupos um depois do outro e façamos corresponder a cada número do grupo um número natural (colocando-os em "fila"):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2}, & \frac{2}{1} & & \frac{1}{3}, & \frac{3}{1} & & \frac{1}{4}, & \frac{4}{1}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{2} & & \frac{1}{5}, & \frac{5}{1} & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
1 & & 2 & 3 & & 4 & 5 & & 6 & 7 & 8 & 9 & & 10 & 11 & \ldots\text{etc}
\end{array}
$$

Dessa forma tome um racional positivo **m/n** , na forma irredutível, *qualquer*. Este número está no grupo da soma **m+n** e dentro deste grupo ocupa um lugar determinado; assim corresponde-lhe um número natural e um só. Reciprocamente, na correspondência acima estabelecida a cada número natural corresponde um número racional e um só.

Portanto, este conjunto é do tipo **enumerável.** E conjunto dos números irracionais é também enumerável?

Esta questão ficou em aberto por muito tempo. Somente em 1874, o matemático G. Cantor respondeu a pergunta de uma forma muito interessante (simples e genial), usando a representação decimal. Vamos apresentá-la a seguir.

Primeiramente lembre-se que todo número real (racional ou irracional) tem uma (única) representação decimal infinita (podemos tomar 0,4999... no lugar de 0,5).

Suponhamos que possamos enumerar *todos* os números reais. Portanto também podemos enumerar os números reais entre 0 e 1. Os números reais entre 0 e 1 podem ser escritos na são da forma $0,b_1b_2b_3b_4...$, onde b_k são algarismos de 0 a 9.

Se tais números estão enumerados, ou seja, em "fila", cada um ocupando uma posição.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \mapsto & 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\dots \\
2 & \mapsto & 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\dots \\
3 & \mapsto & 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\dots \\
4 & \mapsto & 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\dots \\
5 & \mapsto & 0,a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\dots \\
\vdots & &
\end{array}
$$

Note que a_{ik} denota o algarismo da k-ésima casa decimal da representação decimal do número que ocupa a i-ésima posição.

Agora vamos criar um número real $0,b_1b_2b_3b_4...$, da seguinte forma: cada $b_k = a_{kk}+1$, quando a_{kk} é diferente de 9 e $b_k=0$, se a_{kk} é igual a 9. Por exemplo, se $a_{11}=1$ então fazemos $b_1=2$, se $a_{22}=0$, então $b_2=1$, se $a_{33}=9$, então colocamos $b_3=0$, e assim por diante.

Criamos assim um número real entre 0 e 1. Portanto ele tem que estar na lista que fizemos acima, isto é, ele tem que estar em correspondência com um número natural. Imaginemos que $0,b_1b_2b_3b_4...$ ocupa o 5º lugar, isto é,

$$0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6... = 0,a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}...;$$

Para que tais números sejam iguais, cada casa decimal correspondente deve ser igual, ou seja, $b_1=a_{51}$, $b_3=a_{53}$, $b_4=a_{54}$, $b_5=a_{55}$, $b_6=a_{56}$, etc. Mas b_5 não é igual a a_{55} !?!

Em geral se $0,b_1b_2b_3b_4...$ ocupasse o k-ésimo lugar, isto é,

$$0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6... = 0,a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}a_{k5}a_{k6}...$$

então teríamos $b_1=a_{k1}$, $b_3=a_{k3}$, $b_4=a_{k4}$, $b_5=a_{k5}$,..., $b_k=a_{kk}$, etc. Mas b_k não é igual a a_{kk} !

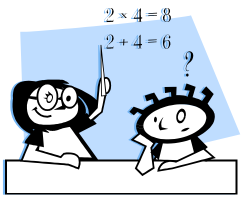
Temos uma contradição aqui! Que foi gerada pelo fato de querermos colocar o número $0,b_1b_2b_3b_4...$ na lista. Então ele não pode fazer parte da lista. Mostramos que existe um número real entre 0 e 1 que não tem um correspondente número natural. Portanto não podemos enumerar TODOS os números reais entre 0 e 1.

Conclusão: não é possível encontrar uma enumeração dos números reais, ou seja, o conjunto dos números reais não é enumerável.

A demonstração que apresentamos é conhecida como o *método da diagonal de Cantor*, em homenagem ao seu criador.

Muitas outras questões

Há muitas outras questões sobre a natureza dos números reais. Quando tratamos do fascinante mundo dos números, certas questões surgem naturalmente. E alguns dos nossos alunos podem muitos bem nos fazer algumas perturbadoras perguntas. Como respondê-las?



Existem infinitos números irracionais?
Seriam todos os números irracionais da forma $\sqrt[n]{p}$ *, ou soma, diferença, produto ou quociente de números deste tipo?*
Entre quaisquer dois números racionais, sempre existe um número irracional?
Entre quaisquer dois números irracionais, sempre existe um número racional?

Atividade. Como achar um número irracional entre $a=\pi+1$ e $b = -\pi+5$?
Obtenha um número racional entre $\sqrt[3]{6}$ e $\sqrt{3}$?
Existe um número irracional entre 1 e 0,99999? Existe um número racional entre 1 e 0,99999?

O que ler.

Caraça, B., *Conceitos Fundamentais da Matemática*, 4a edição, Gradiva, Lisboa, 2002.
Courant,R, Robbins,H. *O que é a Matemática?*, Ed. Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2000 (tradução do original What is Mathematics? 1969).
Eves, H., *Introdução a Historia da Matemática*, 3a edição, Ed. da Unicamp, Campinas, 2002.
Figueiredo, D.G., *Números Irracionais e transcendentes*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, Rio de Janeiro, 1985.

Niven, I., *Números: racionais e irracionais*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, Rio de Janeiro, 1984.
Artigos da *Revista do Professor de Matemática*, SBM, São Paulo. (vol 2, 6, 7, 8, 10 etc)

Sitios (sites)
http://www. educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/index.html
httt://www.matematica.br
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/