NÚMEROS IRRACIONAIS

Quando da apresentação dos números racionais, mostramos que a equação $2x = 7$ não tem solução inteira, mas em $\mathbb{Q}$ essa equação tem solução. Com efeito, observe que como **2** é um número racional não-nulo, **2** tem inverso multiplicativo: $\frac{1}{2}$. Logo, de $2x = 7$, segue que $\frac{1}{2}\cdot(2x) = \frac{1}{2}\cdot 7$. Com isso $\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)\cdot x = \frac{7}{2}$, donde $1\cdot x = \frac{7}{2}$, isto é, $x = \frac{7}{2}$, que é um número racional. Mais adiante mostraremos que apenas os números racionais não são suficientes para conseguirmos resolver as equações, pois, por exemplo, a equação $x^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$. Assim, devemos buscar um novo tipo de conjunto numérico, no qual a equação $x^2 = 2$, entre outras, tenha solução.

Mas não é apenas para se resolver equações que há necessidade de se introduzir outro tipo de número. Observamos que um número racional tem representação decimal finita ou infinita e periódica, e apenas um desses dois tipos de representação. Com base nesse fato, o que podemos afirmar sobre o número **x** cuja representação decimal é a seguinte:

$$x = 0,131131113111131111131111113111111131111111113\ldots \quad ?$$

Observe que essa representação decimal é infinita e não periódica, pois a quantidade de algarismos **1** entre dois algarismos **3** está aumentado de uma unidade. Como os números racionais têm representações decimais finitas ou infinitas e periódicas, concluímos que **x** não pode ser um número racional.

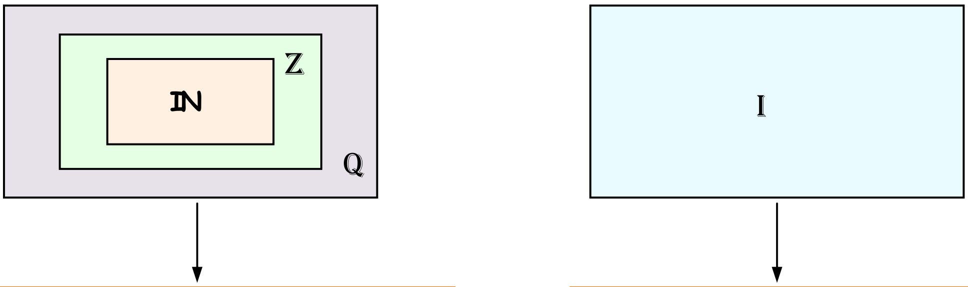
Precisamos, então, definir um conjunto que será formado por números que, como **x**, têm representações decimais infinitas e não-periódicas.

IMPORTANTE

- Denominamos conjunto dos números irracionais, e denotamos por $\mathbb{I}$, o conjunto dos números cujas representações decimais são infinitas e não-periódicas.

Não nos deteremos ao estudo específico dos números irracionais, apenas observamos que introduzimos um conjunto numérico que não é uma ampliação de $\mathbb{Q}$. Mais do que isso, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais não têm elementos em comum!

Observe:



Números decimais finitos e números decimais infinitos e periódicos

Números decimais infinitos e não-periódicos

Assim, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

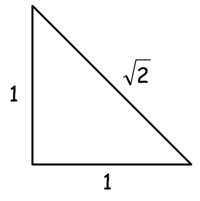
Observe, também, que sendo $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ e $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{com } a \text{ e } b \text{ números inteiros tais que } b \neq 0\right\}$, se um número ***w*** for irracional, então ***w*** não pode ser escrito na forma $w = \frac{m}{n}$, com m e n números inteiros, $m \neq 0$.

Dessa forma, podemos também definir números irracionais como aqueles números que não podem ser escritos na forma $\frac{m}{n}$, com **m** e **n** números inteiros, $n \neq 0$.

Exibiremos, agora, alguns exemplos clássicos de números irracionais, admitindo suas irracionalidades sem demonstrações, pois estas fogem aos objetivos destas notas.

❖ ALGUNS EXEMPLOS CLÁSSICOS DE NÚMEROS IRRACIONAIS

- ✓ Nosso primeiro exemplo parece ser a origem histórica da necessidade da criação dos números irracionais: $\mathbf{x} = \sqrt{2}$. Se você não se lembra, $\mathbf{x} = \sqrt{2}$ é o número positivo que tem como propriedade característica o fato de que $\mathbf{x}^2 = 2$. O número $\mathbf{x}$ é denominado a raiz quadrada de 2 e, conforme já dissemos, $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, ou de outro modo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Geometricamente, o número irracional $\sqrt{2}$ corresponde ao comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos iguais a 1.

  Com efeito, se $\mathbf{x}$ é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos iguais a 1, então o Teorema de Pitágoras nos garante que $\mathbf{x}^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, ou seja $\mathbf{x}^2 = 2$, e sendo $\mathbf{x} > 0$, temos que $\mathbf{x} = \sqrt{2}$.

- ✓ Todas as raízes quadradas de números naturais que não são da forma a^2 são números irracionais (números que são da forma a^2 são denominados quadrados perfeitos).

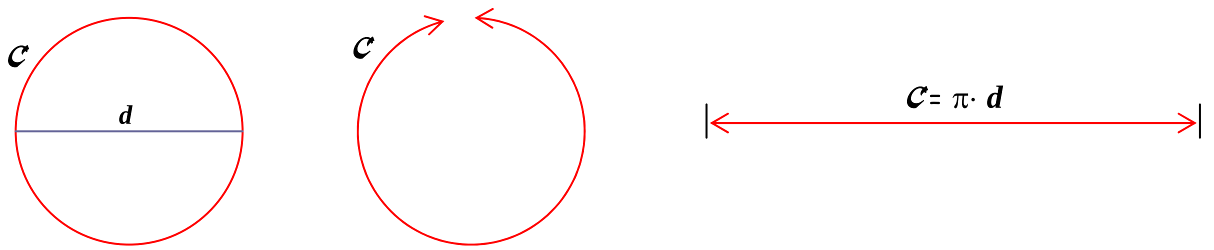
  Assim, além de $\sqrt{2}$, são irracionais:

  $$\sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{8};\ \sqrt{10};\ \sqrt{11};\ \sqrt{12};\ \text{etc}.$$

- ✓ São irracionais somas, diferenças e quocientes entre um número racional e um número irracional e o produto de um número racional não-nulo por um número irracional. São, portanto irracionais:

  $$\sqrt{2}+1;\ \ \frac{\sqrt{5}}{7};\ \ 4-\sqrt{7};\ \ 8\times\sqrt{11};\ \ 10+\sqrt{7};\ \ \frac{6}{\sqrt{13}};\ \ \text{etc.}$$

- ✓ O número pi, tradicionalmente representado pela letra grega minúscula π, talvez seja o irracional mais famoso da história. O número irracional π representa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o seu respectivo diâmetro, ou seja, se $\mathcal{C}$ é o comprimento de uma circunferência de diâmetro $\boldsymbol{d}$, então $\pi = \dfrac{\mathcal{C}}{\boldsymbol{d}}$.



Lembre-se de que os números irracionais têm representação decimal infinita e não-periódica, mas nos dias de hoje, com a ajuda dos computadores, podemos determinar, com centenas de milhões de casa decimais, uma aproximação de um número irracional. Não vamos mostrar nenhuma aproximação desse tamanho, mas exibiremos aproximações com 50 casas decimais de alguns dos irracionais citados acima:

- ✓ $\sqrt{2} \cong 1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537695$;
- ✓ $\sqrt{3} \cong 1{,}73205080756887729352744634150587236694280525381038$;
- ✓ $\sqrt{12} \cong 3{,}46410161513775458705489268301174473388561050762076$;
- ✓ $8 \times \sqrt{11} \cong 26{,}5329983228431987929194618933654934714167083647148$;
- ✓ $\pi \cong 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937511$.

Não cometa o erro de escrever, por exemplo, $\sqrt{2}$ = 1,4142, pois, como $1{,}4142 = \dfrac{14142}{10000}$ é um número racional, ao escrever $\sqrt{2}$ = 1,4142 você está afirmando que $\sqrt{2}$ é um número racional.

Assim, cuidado quando você for usar calculadora, alguns resultados obtidos podem ser aproximações!

Em tempo, as únicas soluções da equação $\mathbf{x}^2 = 2$ são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, que são números irracionais.