ALGUMAS CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE O SISTEMA DOS NÚMEROS REAIS[1]

Plinio Cavalcanti Moreira[2]

Eliana Farias Soares[3]

Maria Cristina Costa Ferreira[2]

INTRODUÇÃO

A literatura existente em português sobre o ensino-aprendizagem dos números irracionais e reais é escassa. Pesquisas que procuram captar as concepções de alunos, professores da escola básica e licenciandos sobre números irracionais, incomensurabilidade, representação decimal infinita, continuidade, etc., quando existem, não são acessíveis. Após um extenso levantamento bibliográfico sobre o assunto encontramos apenas trabalhos produzidos no exterior. TALL, (1994), TALL e SCHWARZENBERGER (1978), J. ROBINET (1986), FISHBEIN, TIROSH e HESS (1979), FISHBEIN, JEHIAM e COHEN (1995), PINTO e TALL (1996) são exemplos de trabalhos que procuram conhecer as concepções dos alunos sobre noções subjacentes ao conceito de número real. Estes trabalhos são muito interessantes e úteis para qualquer estudioso do assunto, mas não refletem necessariamente, nem completamente a realidade no Brasil. Para que se possa formar uma massa de informações mais completa referenciada na nossa realidade e comparar os resultados, além de conhecer e analisar outros ângulos de visão, achamos importante que se amplie, aqui, o volume de trabalhos nessa direção.

Os números reais são tema de fundamental importância na formação do professor de Matemática. Se, por um lado, o aluno que entra para a Licenciatura não tem ainda uma visão teórica mais abrangente sobre os números reais, por outro, ele possui uma experiência escolar de vários anos ao longo da qual construiu certas "imagens conceituais" (TALL e VINNER, 1981) - corretas ou não do ponto de vista da teoria matemática - que constituem o seu saber sobre este conjunto numérico. Detectar essas imagens torna-se extremamente importante, do ponto de vista da ação didático-pedagógica, na medida em que elas são

[1] Este trabalho é parte de um projeto financiado pela CAPES através do PADCT – SPEC – UFMG 01/94-01
[2] Profs. adjuntos do Departamento de Matemática da UFMG.
[3] Prof[a] adjunta do Departamento de Matemática da UFSC.

"psicologicamente resistentes" (FISHBEIN, JEHIAM e COHEN, 1995) e quando ignoradas no processo de ensino podem se transformar em obstáculos para a aprendizagem. É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias. Um aluno do 5.º período da Licenciatura em Matemática da UFMG, respondendo a uma questão, em sala de aula, explicita essa dinâmica. A questão é a seguinte :

Marque a alternativa correta: a) 0,999... < 1 b) 0,999... tende a 1 c) 0,999... = 1.

A resposta do aluno foi:

- *Existe uma justificativa matemática, uma demonstração através de operações com dízimas periódicas e frações que prova que a igualdade (c) é verdadeira. Não me recordo dela agora, mas sei que é verdadeira. Num primeiro momento tem-se o ímpeto de achar que todas as afirmativas são satisfatórias. Na verdade <u>eu ainda acho</u> (grifo nosso) que as duas primeiras não são falsas, pois dentro do que é passado no 1.º e 2.º graus elas têm uma lógica bastante aceitável.*

D. Tall comenta sobre o ensino de Matemática na Universidade:

> *" ... a logical presentation may not be appropriate for the cognitive development of the learners. Indeed, much of the empirical theory reported in the later chapters of this book reveals cognitive obstacles which arise as students struggle to come to terms with ideas which challenge and contradict their current knowledge structure. Fortunately, we are also able to report empirical evidence that appropriate sequences of learning and instruction designed to help the student actively construct the concepts can prove highly successful."* (TALL, 1991, cap.1, p. 3).

A questão que se impõe, então, na formação matemática do futuro professor, é o estabelecimento de uma seqüência didático-pedagógica eficaz que substitua a seqüência puramente lógico-formal usualmente adotada.. Para a elaboração dessa seqüência didática é fundamental conhecer e analisar as imagens que os alunos possuem sobre os conceitos a serem trabalhados. Esse procedimento, não usual no espaço da formação matemática dentro das Licenciaturas, consiste fundamentalmente em reconhecer, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, não somente aquilo que se vai ensinar, mas também aqueles que se empenham em aprender.

Para conhecer melhor essas "imagens conceituais", aplicamos um questionário a 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC sendo 34 do 2.^{0} período, 38 do 4.^{0}, e 12 do 7.^{0}. Dividimos as questões em dois grupos A e B, cada um deles com 11 perguntas, sendo as 6 primeiras comuns aos dois grupos. Esta divisão foi feita para que o questionário não ficasse muito extenso. O grupo A foi respondido por 36 alunos e o B por 48 alunos.

A aplicação se deu em condições normais de sala de aula, com duração de 100 minutos, respostas individuais e sem identificação dos alunos.

Como já foi observado, nosso objetivo não era provar conjecturas ou obter dados estatísticos.. Queríamos conhecer as pré-concepções e imagens que pudessem obstaculizar a aprendizagem dos conceitos relativos aos números reais na Licenciatura. Daí a forma como estruturamos o questionário. As questões são abertas e às vezes convidam à apresentação de respostas numa linguagem mais informal e espontânea; a análise dos resultados é, conseqüentemente, mais qualitativa.

A seguir, comentamos os resultados das seis questões comuns aos dois questionários. A íntegra do questionário, bem como o quadro geral de respostas, podem ser encontrados em FERREIRA, MOREIRA e SOARES, (1999) e SOARES, (1999).

ANÁLISE DOS RESULTADOS

EXISTÊNCIA DE ELEMENTO MÁXIMO (OU MÍNIMO) EM SUBCONJUNTOS DE **R**.

Na nossa experiência de ensino na UFMG e UFSC, temos encontrado, com certa freqüência, referências ao "primeiro número (racional) depois do 1", ao "último número (real) antes do 2" ou expressões dessa natureza. Trata-se, ao nosso ver, de uma espécie de recorrência "inconsciente" ao conjunto dos números naturais, o que indica alguma falha no processo de ampliação dos conjuntos numéricos (dos naturais até os reais) por que passou o aluno. Muitas vezes a ênfase é posta apenas nas novas possibilidades de operação no conjunto mais amplo de forma que se perdem relações importantes entre o conjunto original que foi ampliado e o novo.

Analisando as respostas dadas à seguinte questão:

Questão 1: *a) O conjunto* $A=\{x\in \mathbf{Q};\ 0<x<1\}$ *tem um menor elemento?*

b) O conjunto $B=\{ x\in \mathbf{Q};\ x^2<1\}$ *tem um maior elemento?*

vimos que mais do que um em cada três alunos não reconhece claramente quando um determinado subconjunto limitado de **R** possui elemento máximo ou elemento mínimo.

Estes resultados sugerem que é preciso enfatizar, para além da simples relação de inclusão, uma visão global dos conjuntos numéricos: como um se situa dentro do outro, as propriedades que são generalizadas para o campo mais amplo e aquelas que são específicas do conjunto mais restrito.

Por exemplo, qualquer subconjunto não vazio de **N** pode ser enumerado de tal maneira que a ordem da enumeração respeite a ordem dentro do subconjunto. Isso decorre do fato evidente de que todo subconjunto não vazio de **N** possui um menor elemento. É verdade também que todo subconjunto de **N** não-vazio, limitado, possui um maior elemento. Em **Q**, que é uma ampliação de **N**, nada disso acontece, embora todo subconjunto seja enumerável.

Essa “imagem” de **Q** e de **R** como conjuntos cujos subconjuntos limitados devem possuir elemento mínimo (e/ou máximo) pode criar obstáculos à compreensão da noção de irracionalidade e da própria natureza do contínuo numérico.

CARACTERIZAÇÕES DE NÚMERO IRRACIONAL

As caracterizações de número irracional mais encontradas nos livros textos escolares são as seguintes:

a) O número que não pode ser escrito como fração;

b) O número cuja representação decimal é infinita e não-periódica.

Em ambas fica pressuposto o entendimento do que seja número, isto é, número real. Apesar disso, em seguida, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Essa falta de consistência na conceituação de número revela-se nas respostas dadas à seguinte questão:

Questão 2: *Para você, o que é um número irracional?*

- Vinte e dois alunos apresentaram a caracterização a) acima, quatro a caracterização b) e sete outros citaram as duas. Isto perfaz cerca de 38% das respostas.
- Cinco alunos deixaram em branco ou responderam que não sabiam ou não sabiam explicar.
- Quatro alunos caracterizaram os irracionais como números que não podem ser escritos na forma *a/b,* sem mencionar que *a* e *b* deveriam ser inteiros.
- Dois alunos escreveram:
- *Um número irracional é um número que não conseguimos escrever da forma a/b com a, b* $\in$ ***R****.*
- *É aquele que não pode ser expresso em forma de razão.*

Essas últimas respostas, assim como algumas respostas a outras perguntas do questionário sugerem que muitos dos alunos que deram a caracterização a), usando a palavra fração, poderiam não ter em mente que esta significava a razão de dois inteiros.

Os quase 50% restantes associam, às vezes de maneira bem explícita, os irracionais com tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido. Isto mostra o ar de mistério que cerca os irracionais mesmo para alunos que optaram pelo curso de Matemática no 3.º grau. Eis algumas das respostas apresentadas:

- *Números difíceis de imaginar;*
- *Números que não são exatos;*
- *São números indefinidos, sei que existem mas não sei como determiná-los;*
- *Números que só podem ser representados por i;*
- *Um número que, depois da vírgula, apresenta infinitas casas decimais;*
- *São as frações que não dão exatas (dízimas periódicas);*
- *Um número irracional é aquele formado pela divisão do numerador de uma fração pelo denominador desta fração de modo que esta divisão não é exata e nunca tem fim.*

Chamamos atenção para as três últimas respostas, que associam, de alguma maneira, irracionais com representação decimal infinita. Observamos ainda que grande parte dos alunos que conceituaram os irracionais em alguma das duas formas (a) ou (b) mencionadas anteriormente, mostraram dificuldade com questões que exigem a compreensão do verdadeiro significado dessas definições (veja questões 3, 4 e 5 em seguida).

APROFUNDANDO O CONCEITO DE IRRACIONALIDADE

Como vimos na questão 2, aproximadamente 38% dos alunos apresentaram uma definição formalmente correta de número irracional. Vejamos o que acontece quando é necessário ultrapassar o simples enunciado da definição e penetrar em seu significado.

Com esse objetivo, foram incluídas as seguintes questões:

Questão 3: *O que leva você a acreditar na existência de números irracionais?*

Questão 4: *Você quebra uma barra de chocolate em dois pedaços ao acaso. É sempre possível exprimir a razão entre os "tamanhos" desses dois pedaços (as áreas deles, por exemplo) por um número racional?*

Questão 5*: Sabe-se que π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Chamando de C o comprimento da circunferência (em cm) e de D a medida* *do diâmetro (em cm) obtemos π =C/D. Isso levou um aluno a concluir que π era racional. O que você diria a um aluno que lhe apresentasse tal conclusão?*

Estas questões demandam um entendimento um pouco mais aprofundado do conceito de irracionalidade.

Nós esperávamos que quase todos os alunos dessem a seguinte resposta à questão 2: "número irracional é aquele que não pode ser escrito como fração". Por isso a questão 3 tem a intenção de complementar a 2, como se perguntássemos: "mas existe número que não pode ser escrito como fração?". É claro que não poderíamos ter formulado a pergunta nessa forma para não induzir a resposta à questão 2.

Das 84 respostas apresentadas à questão 3 consideramos 15 (menos de 18%) satisfatórias (mencionaram, mesmo que de forma imprecisa, algum elemento relevante associado à necessidade de criação dos números irracionais). Eis duas destas respostas:

- *O fato de que existem segmentos que medem por exemplo* $\sqrt{2}$ *. (a diagonal de um quadrado de lado 1).*
- *Se não tivesse esses números a reta teria pequenos furos.*

Isto significa que pelo menos 52% daqueles que apresentaram, na questão 2, uma das duas definições lá mencionadas, não conseguem citar uma razão que os leve a acreditar que certas quantidades não podem ser expressas como uma razão de inteiros, isto é, um argumento que os convença de que os racionais não nos bastam.

- Vinte alunos (quase 24%) responderam que nunca haviam pensado sobre o assunto, que não sabiam ou deixaram em branco.

Eis algumas outras respostas:

- *Os professores e os livros didáticos;*
- *Nada me leva a ver os irracionais;*
- *A infinidade de números existentes entre 2 inteiros;*
- *Os exercícios que eu tenho que resolver;*
- *Talvez eu nem acredite, apenas aceite.*
- *Na praticidade, na viabilidade, na facilidade que eles nos auxiliam nos cálculos. Como por exemplo o número π. O que seria da nossa trigonometria sem o mesmo?*

Na questão 4 queríamos verificar com que freqüência a possibilidade da incomensurabilidade está presente nas considerações dos alunos.

Embora cerca de 64% dos alunos tenham respondido não (a resposta correta), somente em dois casos essa resposta foi acompanhada de uma explicação satisfatória. Nas outras explicações, entretanto, aparece com certa freqüência a conclusão de que a razão entre 2 números reais é irracional se um deles (ou ambos) for irracional. Eis algumas respostas que indicam isso:

- *Não, pois na quebra os pedaços podem apresentar valores irracionais.*
- *Não, pois se um pedaço partido for um círculo não se consegue exprimir a razão entre a área restante e a do círculo por um número racional. (Note-se a idéia de que a área de um círculo - provavelmente por envolver o número π - é sempre irracional).*

Observamos que se o valor total da área da barra de chocolate for considerado racional (T) e os pedaços x e y forem irracionais, então a razão $\frac{x}{y}=\frac{T-y}{y}=\frac{T}{y}-1$ é irracional. Dois alunos parecem ter considerado esse raciocínio, embora não o tenham explicitado claramente. Eis suas respostas:

- *Não, pois poderiam ser ambos os pedaços com área irracional e quando somados dar um número racional que é a área total, por exemplo.*
- *Não, pois essa razão pode ser irracional. Se chamamos de 1 o comprimento do chocolate, entre 0 e 1 existem infinitos números irracionais.*

Por outro lado, cerca de 29% dos alunos responderam sim. Na maioria dos casos a resposta sim veio sem nenhuma explicação e talvez possa estar relacionada com a compreensão incorreta da idéia de razão (veja questão 2). Quando se estuda o conjunto dos racionais, a palavra razão é geralmente utilizada como sinônimo de fração e portanto toma o sentido particular de razão entre inteiros. A extensão de **Q** para **R**, sendo feita sem o cuidado necessário, pode manter a associação do conceito de razão com número racional. A resposta de um aluno parece indicar isto:

- *Acredito que sim, pois uma vez partido o chocolate, por exemplo, terá a noção de divisão, e que eu represento como fração, logo é um número racional.*

As outras explicações para a resposta sim podem ser resumidas como: “toda medida é expressa por um número racional”. A análise destas respostas ficou prejudicada pela forma ambígua com que a questão foi formulada. Num sentido estritamente prático toda medida é realmente expressa por um número racional e o contexto em que deveria ser interpretado o problema ficou indefinido.

Na questão 5, obtivemos o seguinte quadro de respostas:

- Onze alunos (cerca de 13%) afirmaram que a conclusão do hipotético aluno está errada e explicaram corretamente onde está o erro.
- Oito alunos responderam "não sei".
- Cinco deixaram em branco (cerca de 16%).
- Cinco afirmaram que a conclusão era correta!
- Quarenta alunos (cerca de 48%) disseram que a conclusão é falsa mas não souberam apontar corretamente onde está o erro no raciocínio. Eis algumas respostas:
- *π não é realmente (grifo nosso) igual a c/d. É aproximadamente igual.*
- *c/d não é uma divisão exata, portanto não é um número racional.*
- *Que nem sempre a razão de dois racionais é racional.*
- *Geometricamente sua representação estaria correta, mas π tem seu valor matemático que é irracional, e portanto não seria possível representá-lo na forma a/b, b ≠ 0.*
- Quinze (cerca de 18%) afirmaram que a conclusão era falsa, sem dar nenhuma explicação.

Além da identificação da idéia de razão entre números reais com fração (razão entre inteiros) as explicações dadas nesta questão apontam ainda em duas direções, que analisamos abaixo.

Na prática, toda medida é expressa por um número racional e, portanto, uma razão entre duas medidas é sempre racional. Esse consenso extrapola a prática imediata e é levado a situações teóricas em que faz sentido considerar também os irracionais. Assim, toda razão entre "números" se converte em razão entre inteiros. No caso da questão 5, aparece então uma contradição: por um lado π é a razão entre 2 números (o comprimento e o diâmetro da circunferência) e, portanto, deve ser racional. Mas, por outro lado, é sobejamente conhecido o fato de π ser irracional.

O aluno também tende a associar ao número irracional a idéia de imprecisão, não exatidão (MONAGHAM 1986, apud TALL, 1994). A falta de significado para a representação decimal infinita e não periódica é uma das responsáveis por isso ("não se sabe o que vem depois da vírgula"). Sendo o perímetro da circunferência e seu diâmetro entes geométricos cujos comprimentos são finitos, suas medidas são pensadas como números racionais, o que também leva à contradição mencionada.

Alguns alunos reconheceram a razão c/d como um número irracional. Mas ao tentarem justificar deixaram claro que, para verificar se a divisão de dois reais é racional, olhavam para cada um deles separadamente. Assim, se para estes alunos, c, por exemplo, era irracional, então a razão c/d também seria (compare com a questão 4).

A DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS NA RETA REAL

Aqui investigamos a percepção dos alunos sobre a maneira como os racionais e os irracionais se distribuem dentro dos reais. Essa questão é importante já que os irracionais "completam" os racionais para formar **R**. Uma boa percepção de como se situam **Q** e **R - Q** na reta numérica é fundamental para compreender o papel desses conjuntos na formação dos reais e a própria natureza do contínuo numérico.

Questão 6: *a) Encontre um número racional e um irracional entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$

b) Encontre três números racionais e três irracionais entre $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$.

c) Quantos números racionais existem entre $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$*? E irracionais?*

Explique sua resposta.

- Apenas 42% dos alunos afirmaram que existem infinitos racionais e infinitos irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, mesmo computando as respostas sem justificativa ou com justificativa incorreta.
- Nove alunos (cerca de 10%) apresentaram uma justificativa correta para o caso dos racionais e apenas três para o dos irracionais.
- Apenas 25% conseguiram exibir 3 irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ enquanto 44% exibiram 3 racionais.

Transcrevemos abaixo algumas das explicações referentes a esta questão:

- *Creio que existam infinitos números racionais, porém um número finito de irracionais, porque o conjunto dos racionais é muito maior que o dos irracionais. Além disso há um limite para este conjunto* $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$.
- *Não conheço nenhum método de encontrar números irracionais. Talvez pudesse solucionar este problema descobrindo primeiro um irracional através de uma fórmula que não me lembro mais.*
- *Não há números irracionais entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$.
- *Irracionais, infinitos. Racionais, apenas a média entre os dois.*
- *É complicado achar números entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{3}{4}$, *pois só obteremos esta resposta se dividirmos um número irracional por um número racional.*
- *Muitos racionais. Irracionais também acho que muitos.*
- *Racionais, nenhum; irracionais, infinitos. Entre dois números quaisquer existem infinitos outros números.*

É interessante observar que muitas das respostas incorretas nos itens a) e b) associavam dízimas periódicas com irracionalidade, isto é, representações decimais infinitas com irracionalidade. (Veja a questão 2.)

INFERÊNCIAS PARA O TRABALHO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O fato de que as razões entre inteiros não podem exprimir todas as "quantidades" não é tão simples como pode parecer. Envolvidas no campo conceitual dos irracionais aparecem idéias relativamente sofisticadas como as de limite, continuidade, infinito. Por outro lado, como já observamos, e as respostas a este questionário mostram, os licenciandos possuem suas imagens, às vezes simplistas, às vezes ingênuas, mas todas resultantes da sua vivência escolar. Esses alunos vão retornar eventualmente à escola como professores.

Trabalhar, na Licenciatura, o conceito de número irracional a partir da problematização e do questionamento dessas imagens é seguramente mais eficiente do ponto de vista didático e pedagógico do que simplesmente apresentar as definições corretas e provar formalmente os resultados.

Destacamos, em forma de síntese, dois pontos que podem ser deduzidos da análise dos resultados que acabamos de apresentar:

1) O contraste racionalidade versus irracionalidade parece ser percebido como pura formalidade, na medida em que a distinção é apenas na forma de representação (fração x não fração - decimal finito ou periódico x decimal infinito não periódico- compare com os resultados obtidos por GIMENEZ e i CHIESA, 1994). O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passa ao largo de quase todas as respostas. Nesse sentido é que se torna compreensível a identificação bastante freqüente de formas decimais infinitas com os números irracionais: se a distinção entre racional e irracional é uma formalidade, se ela é uma separação arbitrária de dois tipos de número, faz mais sentido colocar de um lado os decimais finitos e de outro os infinitos do que agrupar os finitos e os infinitos periódicos contrastando-os com os infinitos não periódicos.

2) Se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. Por exemplo, o que significa $2^{\sqrt{2}}$? Qual o sentido da forma decimal infinita? Os irracionais são densos em **R**?

O estudo dos sistemas numéricos é de fundamental importância na formação matemática do futuro professor. Mas os resultados deste questionário, assim como outros estudos que temos feito nessa direção (ver FERREIRA, MOREIRA e SOARES , 1999 e FERREIRA, MOREIRA e SOARES, 1997), indicam que uma abordagem do tema, especificamente voltada para a formação do futuro professor, deve ser construída na Licenciatura.

Porque uma nova abordagem? Em que consiste sua especificidade?

Na sua formação matemática dentro da Licenciatura, o futuro professor realiza um estudo sistemático dos números reais geralmente a partir de um enfoque axiomático: **R** é apresentado como um corpo ordenado completo, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades.

Como vimos, o conflito entre esse tipo de abordagem e as imagens conceituais que acabamos de descrever termina por acentuar a desorganização e a inconsistência do conjunto de modelos com que os alunos elaboram seu pensamento conceitual.

A formação matemática na Licenciatura deve, ao nosso ver, tomar como parâmetro essencial o fato de que seus alunos vão se tornar professores da escola básica. Isso significa, entre outras coisas, que eles irão, eventualmente, ajudar as crianças a construir, criticar e reformular seus próprios modelos intuitivos. Por isso uma abordagem específica para a Licenciatura deveria partir fundamentalmente da problematização das concepções e das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão teórica global do conjunto **R** que efetivamente instrumentalize para o ensino na escola básica.

Uma formação matemática sólida para o professor do ensino básico não consiste, ao nosso ver, em "superar o intuitivo" e se ater às definições formais e às provas rigorosamente dedutivas. O desafio é trabalhar sobre esse mosaico de representações que o aluno possui proporcionando-lhe a oportunidade de reelaborar a sua intuição sobre os elementos conceituais que vão se colocar em questão na sua prática de ensino na escola. Em outras palavras, aprofundar a formação matemática do professor é, na nossa concepção, aprofundar a sua visão intuitiva dos conceitos relevantes dentro da sua prática. Isso significa uma superação tanto da abordagem formal axiomática dos cursos de Análise como daquela encontrada nos textos didáticos escolares a qual, de certo modo, se reflete nas respostas do questionário que analisamos neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C., SOARES, E. F. - Relatório de Projeto de Pesquisa - Departamento de Matemática – UFMG - 1999

FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C.; SOARES, E. F. - Da Prática do Matemático para a Prática do Professor: Mudando o Referencial da Formação Matemática do Licenciando. Zetetiké vol. 5, n. 7, pp. 25-36 1997.

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R. ; COHEN, D. - The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics, vol. 29, pp. 29-44,1995.

FISHBEIN, E.; TIROSH, D. ; HESS, P. - The Intuition of Infinity. Educational Studies in Mathematics, vol. 10, pp. 3-40,1979.

GIMENEZ, C. A. ; i CHIESA, C. R. - An Inquiry into the Concept Images of the Continuum. Trying a Research Tool. Proceedings of PME XVIII, Lisboa, II, pp185-192, 1994.

MONAGHAN, J. D. – Adolescent's Understanding of Limits and Infinity. Unpublished Ph.D. thesis, University of Warwick, U.K., 1986.

PINTO, M. ; TALL, D. - Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers. Proceedings of PME XX, Valencia, IV, pp139-146, 1996.

ROBINET, J. - Les Réels: quels modèles en ont les élèves? Educational Studies in Mathematics, vol. 17, pp. 359-386, 1986.

SOARES, E. F. - Relatório de Projeto de Pesquisa – Departamento de Matemática - UFSC- 1999

TALL, D. in Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, (Tall, D. ed), Dordrecht, 1991, cap. 1, p. 3.

TALL, D. - Cognitive Difficulties in Learning Analysis - Mathematics Educational Research Centre, Warwick University, England, 1994.

TALL, D. ; SCHWARZENBERGER, R. L. E. - Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching, vol. 82, pp. 44-49, 1978.

TALL, D. ; VINNER, S. – Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, vol. 12, pp151-169, 1981.