UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

EDITAL DAS LICENCIATURAS 2004

ENSINO DOS NÙMEROS IRRACIONAIS NO NÌVEL FUNDAMENTAL

COLEÇÃO CADERNOS DE MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

VOL 1

Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia

Acad. Débora da Silva Soares

Acad. Juliana Fronza

2005

PARTICIPAÇÂO

Alunos das disciplinas Ensino e Aprendizagem de Matemática III e Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática III, em 2004/1 e 2004/2.

1. Alunos das disciplinas Ensino e Aprendizagem de Matemática III:

Eduardo Perez Spalding

Giovana Lucini Berger

Lisiane Rollsing Teixeira

2. Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática III:

Débora da Silva Soares

Débora Xavier Rodrigues

Eduardo Melloni Lucchesi

Giovana Lucini Berger

Juliana Fronza

Lilian Farenzena

Lisiane Rollsing Teixeira

Melissa Meier

Reinaldo da Silva Rodrigues

Rodrigo Orestes Feijo

Suzana Seidel

APRESENTAÇÂO

Este Caderno é dirigido para professores de Matemática do nível fundamental, atuando nas séries de quinta a oitava. Ele trata de um tema complexo: ensino e aprendizagem dos números irracionais.

Iniciamos, justificando o texto, a escolha do tema e o trabalho desenvolvido, colocando a questão-chave: É realmente importante levar, para a escola básica, conceitos com tal nível de abstração? Por quê ensinar números irracionais, na escola?

Partimos para uma análise epistemológica dos irracionais. Como se deu a construção histórica deste conceito? Quais são os obstáculos históricos, nesta construção? Quais são as diferentes concepções de irracional historicamente produzidas?

A seguir, delineamos uma análise dos caminhos já percorridos e de novos caminhos que estão se abrindo para o ensino dos irracionais, na escola. O ensino usual é satisfatório? Quais são seus pontos frágeis? O que há de novo?

Com base nestas análises, partimos para um plano de ensino que inclui uma seqüência de atividades prontas para serem desenvolvidas, em nível de sétima ou oitava séries. Este plano foi posto em ação em duas escolas públicas estaduais da região da Grande Porto Alegre. Fez parte de um ciclo de reflexão-ação-reflexão, avaliado e modificado. Trazemos aqui o produto final, com nossas considerações sobre suas vantagens e com nosso alerta para problemas.

Acompanha este Caderno uma boa bibliografia que foi nossa base de consulta e referência. É preciso valorizar os autores consultados e os textos estudados. Não existe prática sem teoria e qualquer ação didática para ser válida deve necessariamente ter respaldo teórico consistente.

Este Caderno é produto do projeto “Formação de professores de Matemática reflexivos: articulação da pesquisa com a prática docente”, contemplado com verbas do Edital das Licenciaturas- 2004, coordenado pela Pró-Reitoria de Graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O Projeto tem objetivo de contribuir simultaneamente para a formação do professor - com espírito de pesquisador, indagador e produtor de conhecimentos - e para a elaboração de propostas didáticas que possam ser reproduzidas nas escolas, alterando de alguma forma o quadro crítico do ensino da Matemática.

O Projeto envolveu durante o ano de 2004, alunos das disciplinas Ensino e Aprendizagem de Matemática III (20 alunos), e Pesquisa em Educação Matemática (8 alunos) e Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (11 alunos), do currículo do Curso de Licenciatura em Matemática. Estas disciplinas foram objeto de estudo e experiências para se adaptarem às novas Diretrizes curriculares das Licenciaturas, no sentido de virem a se tornar disciplinas de caráter prático.

Um dos itens mais inovadores da Resolução do CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002, consiste na especial valorização dada à prática, definida como lugar, foco e fonte de pesquisa. O documento também enfatiza a necessidade de associar o preparo do professor ao aprimoramento das práticas investigativas. O conhecimento de processos de investigação vai possibilitar o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas, que devem ser desenvolvidas com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando atuação em situações contextualizadas.

O Projeto “Formação de professores de Matemática reflexivos” tomou como ponto de partida tópicos específicos dos programas dos níveis fundamental e médio e dos cursos de Licenciatura, para tratá-los com base na Engenharia Didática. Esta metodologia de pesquisa, criada pelos franceses, tem o mérito de articular teoria e prática, reflexões e ações didáticas, sugerindo caminhos racionais para o professor insatisfeito com as condições usuais de ensino/aprendizagem. A idéia é a produção de propostas que alterem a tradição, contribuindo de forma concreta para a melhoria do ensino.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO

O ensino dos números irracionais é essencial, nas últimas séries do nível fundamental porque, é preciso construir o Conjunto dos Reais a fim de poder prosseguir com o estudo da matemática.

Não há como introduzir o tema das funções e dos seus gráficos, sem passar pela identificação do conjunto numérico dos reais com a reta geométrica; não há como fazer geometria, trigonometria ou logaritmos, progressões geométricas ou matemática financeira, sem reconhecer os irracionais.

Mas tratar este assunto no nível fundamental é, certamente, muito difícil. Os números irracionais não existem no mundo concreto, são abstrações matemáticas, só existem no mundo das idéias, para aceita-los é preciso imaginar processos infinitos e proximidades que tendem a zero. Ou seja é necessária a noção de limites e continuidade.

Apresentamos um pré-teste para alunos da oitava série de duas escolas de porto Alegre. Numa das questões pedimos exemplos de números racionais e de números não racionais, ou também chamados irracionais. Muitos dos alunos não responderam porque não entenderam os termos utilizados ali.

Não lembravam, ou nunca ouviram o termo RACIONAL. Conheciam sim, as frações, os números fracionários, os números decimais, as dízimas periódicas. Mas os termos RACIONAL e IRRACIONAL não faziam sentido para eles.

Conversando com professoras de quinta a oitava, muitas duvidam da necessidade de fixar estes nomes. O que importa, segundo elas, é que, ao fim da oitava série, os alunos estejam operando com números reais e marcando-os na reta real. Mesmo sem saber usar o termo REAL.

Como responder a estas professoras sobre a necessidade de trazer para o nível fundamental a nomenclatura dos conjuntos numéricos? Talvez fazendo um paralelo com a Língua portuguesa: nossos alunos precisam aprender Gramática ou apenas precisam saber ler a escrever o suficiente para se comunicar?

Em Matemática, acreditamos que não basta operar com números para ser alfabetizado, é preciso também classificá-los, entender sua construção, diferenciá-los entre si e relacioná-los.

O livro didático, em geral, apresenta os irracionais a partir da negação dos racionais, deixando dúvidas sobre sua existência. O irracional é apresentado como um número que não pode ser escrito da forma a/b, com a e b inteiros e b não nulo. E existem números deste tipo? Durante milênios de anos, estudiosos da Matemática, como Pitágoras e Euclides, negaram a existência destes números. Nos dias de hoje, todas as calculadoras e computadores dão informações aparentemente precisas e utilizando somente números racionais. Os livros e os professores afirmam que raiz quadrada de 2 e PI são irracionais, assim como todos os números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Mas qual é a justificativa? Existem muitas demonstrações matemáticas que comprovam estes resultados, mas elas são muito abstratas para os alunos de nível fundamental. Como convence-los da existência dos irracionais?

Este texto é dirigido para professores. Traz um capítulo sobre as origens dos Números Irracionais e outro em que salienta os obstáculos na construção do conceito. Faz uma análise do ensino usual e apresenta o conteúdo, em nível adequado ao ensino fundamental. Finalmente, desenvolve uma proposta de ensino, experimentada em duas turmas de oitava série de nível fundamental, detalhada e comentada. Nessa proposta, pressupomos que os estudantes do nível fundamental não têm maturidade para enfrentar diretamente a questão da irracionalidade, eis que, historicamente, foram necessários milhares de anos para resolvê-la de forma satisfatória. Nesta linha, decidiu-se contornar este obstáculo.

A idéia consiste em partir da análise de gráficos circulantes em jornais, revistas e livros das outras disciplinas escolares e mostrar a importância da identificação de retas com números, para processar informações. Trata-se então da construção da reta real Definindo os reais, tratam-se as formas decimais destes números. A partir destas formas, pode-se classificar os reais em números racionais e irracionais.

Espera-se com esta proposta que os alunos respondam às seguintes questões:

1. O que é e para que serve a reta real? O que é e para que serve o conjunto dos números reais?

2. Que números têm lugar na reta real? Que números pertencem ao conjunto dos números reais?

3. Como podem ser as representações decimais dos números reais? Como podem ser as representações decimais dos números racionais e dos não racionais?

4. A calculadora fornece informação suficiente para distinguir os números racionais dos irracionais?

2. ORIGEM DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A origem histórica dos números irracionais está intimamente ligada com fatos de natureza geométrica e de natureza aritmética.

Na época dos faraós, no antigo Egito, após as cheias do Nilo era necessário refazer a divisão das terras entre a população. Para isso, utilizavam pedaços de corda como uma unidade de medida, verificando quantas vezes aquele pedaço cabia nos lados de cada terreno. Porém, nem sempre esta medida dava exata. Surgiu, então, a necessidade de se criar um outro tipo de número que expressasse estas medidas: o número racional.

A idéia vigente era que, utilizando uma mesma unidade de medida, um certo pedaço de corda, por exemplo, qualquer outro segmento teria medida racional obtida a partir desta unidade. Por exemplo, 2 cordas e 1/7 de corda ou 3/2 de corda.

Também foram os egípcios que descobriram que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência, e o seu valor é um número "um pouquinho maior que 3". É essa razão que hoje chamamos pi, cujo símbolo é Π. Pi é a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência qualquer:

Π = Circunferência/Diâmetro

Os egípcios acreditavam que Π fosse racional e igual a 31/6, que é aproximadamente 3,16. Para calcular este valor, usaram argumentos geométricos: traçaram um octógono inscrito num círculo e calcularam a razão entre seu perímetro e o diâmetro da circunferência.

A Ciência grega conseguiu um aprofundamento de toda a teoria dos números racionais, por via geométrica - "Elementos de Euclides" - mas não avançou, por razões essencialmente filosóficas, no campo do conceito de número. Para os gregos, toda a figura geométrica era formada por um número finito de pontos, todos iguais entre si; daí resultava que, ao medir um comprimento de n pontos com outro de m, essa medida seria sempre representada por uma razão entre dois inteiros n/m (número racional).

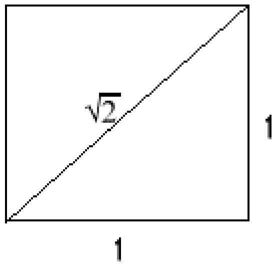
Nessa ótica, qualquer par de segmentos é comensurável, isto é, sempre é possível encontrar uma certa unidade de medida tal que, ambos os segmentos possam ter medida inteira nesta unidade.

Mais formalmente, dois segmentos A e B dizem-se *comensuráveis* se são múltiplos de um segmento comum. Em outros termos, A e B são comensuráveis se existir um segmento C de medida u, escolhido como unidade de medida, e se existirem inteiros positivos m e n tais que A= mC e B= nC, então A e B são múltiplos do segmento comum C, e assim se dizem *comensuráveis*.

Conseqüência da crença na comensurabilidade, as razões entre duas medidas quaisquer seriam sempre racionais. Deste modo, só existiriam os racionais. Os números racionais seriam suficientes para medir o mundo e dariam conta de todos os problemas oriundos da Geometria.

Pitágoras foi um dos maiores matemáticos da Grécia Antiga. Viveu no século IV aC, e chefiava uma comunidade, ao mesmo tempo religiosa , filosófica e política, que visava a reforma social e política da região onde vivia. Seus discípulos eram conhecidos como “os pitagóricos”. A matemática como argumento dedutivo-demonstrativo começa com Pitágoras e está ligada ao misticismo. Ele acreditava que todas as coisas são constituídas de números. “Número”, na linguagem pitagórica, era sinônimo de harmonia. A maior descoberta de Pitágoras e de seus discípulos diz respeito à provar a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Este resultado é conhecido como Teorema de Pitágoras.

Aplicando o resultado de Pitágoras a um quadrado de lado considerado unitário, encontrou-se a medida da diagonal: $\sqrt{2}$



Outra forma de pensar $\sqrt{2}$, é defini-la como a razão entre as medidas da diagonal e do lado de um quadrado qualquer:

$\sqrt{2}$ = diagonal/ lado.

O problema geométrico consistia, na época, em mostrar que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos comensuráveis.

Os gregos ao tentar verificar a comensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado, encontraram um dos primeiros casos de incomensurabilidade.

Este problema geométrico traz em si outro problema, de natureza aritmética, que consiste na impossibilidade de encontrar números conhecidos - racionais - para raízes quadradas de outros números, como por exemplo, raiz quadrada de 2.

Em linguagem aritmética, a questão era: existe um número racional que corresponde à raiz quadrada de 2? Ou, de outra forma, $\sqrt{2}$ pode ser representada por uma razão de dois números inteiros?

Os gregos negaram a existência de números não racionais. Para eles, a reta onde se marcavam todos os racionais era perfeitamente contínua; admitir os irracionais era imaginá-la cheia de "buracos".

Somente no século XVII, com a criação da Geometria Analítica (Fermat e Descartes), se estabelece a simbiose do geométrico com o algébrico, favorecendo o tratamento aritmético do comensurável e do incomensurável. Newton (1642-1727) define pela primeira vez "número", tanto racional como irracional.

Nesta ótica, provou-se que o número que dá o comprimento da hipotenusa (raiz quadrada de dois) é irracional. É possível demonstrar que $\sqrt{2}$ e todas as outras raízes inexatas de números inteiros positivos são irracionais, utilizando noções de frações irredutíveis, inteiros primos entre si e divisores comuns.

Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, teríamos p, q Є Z, primos entre si, isto é com um único divisor em comum, 1, mdc(p, q) = 1 e tal que $\sqrt{2} = p/q$.

Daí:

$\sqrt{2} = p/q \Leftrightarrow 2 = p^2/q^2$

Mas como p e que são primos entre si, não tem divisores comuns, além do 1. Assim também p^2 e q^2. Isso mostra que p^2 é igual a 2 e q^2 é igual a 1.

Então existe um número inteiro p tal que $2 = p^2$, isto é, 2 tem raiz quadrada inteira e exata!. Isto é um absurdo.

Conclusão: $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Também é possível provar que $\sqrt{2}$ é Irracional recorrendo às noções de números pares e ímpares.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ fosse racional, então teríamos p, q Є Z com mdc(p, q) = 1 tal que $\sqrt{2} = p/q$ (definição de número racional).

Daí:

$\sqrt{2} = p/q \Leftrightarrow 2 = p^2/q^2 \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$

Isso mostra que p^2 é par.

Então p é par.

Digamos p = 2k, com k Є Z.

Substituindo na equação anterior:

$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$.

Isso mostra que q^2 é par, então q é par. Mas então p e q são ambos divisíveis por 2. Absurdo!!! Pois mdc(p, q) = 1.

Portanto $\sqrt{2}$ não é racional. Logo $\sqrt{2}$ é irracional.

É bom lembrar que todas as raízes inexatas são irracionais. Na verdade estes são os números irracionais mais simples: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, etc. Estes números são soluções das equações $x^2 - 2 = 0$, $x^3 - 3 = 0$, $x^2 - 6 = 0$, respectivamente.

Por essa razão eles são chamados de *irracionais algébricos*. Vamos deixar claro o que é um número algébrico: é um número real que satisfaz alguma equação da forma:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0,$$

onde os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros.

Mas acontece que muitos números irracionais não são algébricos. Por isso, são chamados de irracionais transcendentes. Estes não são raízes de equações da forma acima.

O que sabemos sobre o pi? É racional ou irracional? Se for irracional, é algébrico ou transcendente? A resposta a esta pergunta foi dada em 1881 por um matemático chamado *Lindemann* que provou que pi é transcendente.

Os matemáticos dedicaram-se ao cálculo de pi, buscando um período para verificar se pi era racional. Hoje, os computadores calculam este valor com 100, 1000, 10 000, milhões de casas decimais! Sabe-se que pi é irracional.

Pi=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651
3282306647093844609550582231725359408112848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664 82...

Muitos dos símbolos matemáticos que usamos atualmente são devidos ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Foi Euler quem, em 1737, tornou conhecido o símbolo Π para o número pi. Foi também nesta época que os matemáticos conseguiram demonstrar que Π é um número irracional.

Mais curioso é que podemos provar que o conjunto dos números irracionais transcendentes é maior do que o dos números irracionais algébricos e que o conjunto dos números irracionais é maior do que o dos números racionais.

3. CAMINHOS PARA O ENSINO DOS IRRACIONAIS

Na vida escolar, o primeiro número irracional que surge é o Π, quando se introduz a geometria. Trabalham-se formas geométricas, comprimentos e áreas das figuras geométricas mais simples, como o círculo.

Alguns livros, de sexta ou sétima série, sugerem a construção de PI a partir de sucessivas medidas de objetos com base circular: em cada objeto, medem-se circunferência e diâmetro e calcula-se a razão das duas medidas. Salientam-se as proximidades entre os números obtidos, algo em torno de 3,14, talvez. Passam à história de PI, à sua apresentação via calculadora e ao cálculo do comprimento de circunferências variadas, a partir do diâmetro.

Nos livros mais antigos. Década de 80. na sétima série, há uma passagem rápida pelos números irracionais.

Alguns livros didáticos apresentam os números irracionais em meia página, definindo-os como "números decimais infinitos não periódicos, portanto não racionais". Outros recorrem à idéia de número racional para definir os números irracionais, como "números que não são racionais". Neste momento, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal de Π é infinita e não periódica e que o mesmo acontece com $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. Tais números são irracionais e aparentemente só existem estes irracionais. Parece que o conjunto dos irracionais é muito reduzido, o que não é verdade.

Outro problema resultante desta estratégia: os alunos de oitava série, quando estão trabalhando com equações de segundo grau encontram números como Raiz quadrada de –4 ou raiz quadrada de –1. A professora os alerta, que estes números não existem, devem ser abandonados. Quando perguntamos sobre exemplos de irracionais, estes alunos apresentaram raiz quadrada de –4, pois como ele não existe, não é racional. E realmente não é. Só que também não é irracional.

Só mais tarde, na oitava série, o aluno é apresentado ao Teorema de Pitágoras. Ou seja, não se faz relação entre as questões geométricas que originaram a criação dos irracionais com este conteúdo. Inverte-se a ordem, colocando-se a Geometria depois dos Irracionais.

Os PCN alertam para a importância e a dificuldade do tratamento dos números, na escola. Não é desejável que os alunos saiam da escola básica sem terem construído os conceitos de números e conjuntos numéricos, estando restritos ao nível utilitário, realizando cálculos segundo regras memorizadas, sem qualquer compreensão a respeito do que estão fazendo.

O documento sugere que, para modificar este quadro, é necessário explorar amplamente o sentido numérico. Isso pode ser feito através de problemas contextualizados ou buscando relações dos números com sua história e com outros tópicos da Matemática, que estão separados em diferentes séries.

Ao trabalhar com os números, é preciso criar atividades que explorem diferentes contextos, trabalhar com suas diferentes representações, explorar a ordenação e a comparação e, especialmente, trabalhar com a reta numérica.

O estudo dos Números Racionais, feito em geral na sexta ou sétima série, emperra em dois itens: a compreensão dos diferentes significados dos números racionais e os processos de cálculo. A sugestão consiste em utilizar as situações-problema históricas como um guia. Além disto, são muitos ricos os problemas do dia-a-dia, que abordam, em sua grande parte, os números racionais em sua forma decimal, abrindo portas para a calculadora como uma ferramenta de ensino. Mesmo sendo a forma decimal a mais usada no cotidiano, a fração tem seu papel fundamental na aprendizagem, principalmente por ser à base do conceito de razão.

Os PCN reconhecem as dificuldades históricas que ocorreram na construção dos números irracionais. Sendo assim, não recomendam o trabalho formal com estes números, em nível fundamental. Sugerem os seguintes tópicos: identificação do número irracional como sendo expresso por infinitas ordens decimais não periódicas; distinção entre racionais e irracionais; identificação de números irracionais obtidos por raízes quadradas; localização destes números na reta numérica, com régua e compasso; cálculos a partir de aproximações com os racionais utilizando-se, também, a calculadora.

Alguns autores (Matsubara e outros, 2000; Longen, 1999) apresentam textos atualizados e dão especial cuidado à história dos números, como forma de contextualizar os irracionais.

Iniciam com a história da crise da irracionalidade pela qual passaram os gregos na época de Pitágoras. Trabalham o conceito de incomensurabilidade de forma intuitiva, medindo e calculando razões entre o comprimento de circunferências e seus diâmetros, relembrando PI, e entre o comprimento da diagonal do quadrado e o lado, para chegar à Raiz de 2. Utilizam o Teorema de Pitágoras para o cálculo de diagonais, justificando o aparecimento das raízes inexatas. Tratam da história de PI e do Teorema de Pitágoras. Alguns demonstram o Teorema, com construções geométricas. Recorrem às calculadoras para mostrar que estes números não admitem período. A partir de exemplos, explicam que todo número racional tem representação decimal finita ou infinita periódica. Definem finalmente número irracional como números não racionais, aqueles que têm representação infinita e não periódica. Criam exemplos na forma decimal, agregam as raízes e Pi. O conjunto novo que resulta destas construções é denominado conjunto dos números reais. A partir daí, partem para a construção da reta real, localizando frações e números irracionais.

Textos com esta abordagem são bem recentes e sinalizam uma evolução na direção da valorização da história dos números e das questões geométricas que deram origem aos irracionais. Ao mesmo tempo, mostram a preocupação dos autores em explicitar a crise da irracionalidade e convencer os alunos da existência dos números irracionais, recorrendo para isto, ou à noção de incomensurabilidade ou ao cálculo por aproximações sucessivas.

O presente trabalho traz uma outra possibilidade de desenvolvimento do tema, considerando os conceitos de obstáculo epistemológico e obstáculo de aprendizagem.

Aprendemos com Pais(2004), que a noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente pelo filósofo francês Gastão Bachelard, na obra *A Fornação do Espírito Científico,* publica da em 1938. Bachelard observou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

A noção de obstáculo é fundamental para pensar as questões de ensino e aprendizagem assim como as questões relativas à criação e formalização do conhecimento científico. O conceito de obstáculo epistemológico foi criado para se referir a uma fonte comum, presente e persistente, para as dificuldades de construção de certo conceito: as dificuldades podem estar ligadas a uma maneira de ver, uma concepção característica, coerente, incorreta mas antiga, que tem êxito nas práticas cotidianas. Estas dificuldades são efeito de um conhecimento anterior que funcionava e que agora se revela falso ou simplesmente inadequado.

Parece-nos que o conhecimento dos números racionais e do conceito de racionalidade constitui obstáculo epistemológico para a construção do conceito de irracionalidade.

Assim como os gregos antigos, as pessoas da atualidade que não são matemáticos têm todas as condições para crer que os números racionais são suficientes para medir o mundo e resolver todos os problemas do cotidiano e das outras ciências. O advento das máquinas, calculadoras e computadores, contribuiu ainda mais para reforçar esta crença, eis que todas as máquinas são racionais. Em todas as profissões, utilizam-se números racionais e representações decimais exatas para os números, boas aproximações para os resultados procurados, com uma, duas ou mais casas depois da vírgula.

Existe também o conceito de obstáculo de aprendizagem, obstáculos que surgem na escola. Lá, mesmo com dificuldades nas operações e nas múltiplas formas de representação, não há problemas na construção dos racionais. Trabalhar com racionais faz parte da vida: temos aplicações com dinheiro, com barras de chocolate, com copos de água e nas páginas dos jornais, com porcentagens.. É muito rico o mundo das aplicações e contextualizações dos números racionais. É muito prazeroso para os professores trabalhar no mundo racional. Nas revistas e congressos da área de Educação Matemática, multiplicam-se as propostas para ensino deste tópico. Esta ênfase à racionalidade constitui obstáculo de aprendizagem da irracionalidade. Observa-se isto nos livros didático. Após muitas páginas sobre racionalidade, em duas páginas são apresentados e exemplificados os irracionais. Rapidamente apresentam-se os reais. É difícil encontrar artigos que tratem da questão da irracionalidade na sala de aula.

A idéia do presente trabalho é contornar os obstáculos que se evidenciam e se opõem à criação do conceito de irracionalidade, quando se parte da noção de racionalidade. Inspirados nas propostas do NCTM (1984) que não são recentes, mas parecem esquecidas, iniciamos com a construção da reta real e dos reais, sem salientar a crise da irracionalidade.

LINHA DE DESENVOLVIMENTO USUAL
DE 5ª A 8ª SÉRIE

Frações

Números decimais

Números Negativos

PI- razão entre circunferência e diâmetro

Números Racionais

Números irracionais – aquele que não é racional
(número decimal não exato e não periódico)

Exemplos PI e Raiz de 2

Número real

Reta real
(Correspondência um a um entre o conjunto dos reais e a reta)

Relações de inclusão entre os conjuntos

Teorema de Pitágoras

NOSSA PROPOSTA
APLICADA NA 8ª SÉRIE

Elemento Motivador: Gráficos

Reta real

Número Real
(é aquele que pode ser representado por um ponto na reta numerada)

Construção da reta numerada
(a partir de uma unidade de medida)

Os números reais são obtidos das medidas sobre a reta

Números reais na forma decimal

Números decimais exatos e periódicos
(correspondem aos números racionais)

Números decimais não exatos e não periódicos
(correspondem aos números irracionais)

Outros números obtidos por medidas: as raízes e PI

Teorema de Pitágoras

As raízes inexatas são números reais e irracionais

PI é irracional

Um número real pode ser racional ou irracional

4. NÚMEROS REAIS E IRRACIONAIS EM NÍVEL FUNDAMENTAL

A proximidade entre os racionais é a propriedade que permite usá-los para expressar medidas ou cálculos com precisão tão grande quanto se queira. De fato, todos os cálculos, todas as medidas, todos os usos práticos dos números, são feitos com números racionais.

Os números racionais constituem um sistema de numeração. Neste sistema as operações de adição e multiplicação, assim como suas inversas, subtração e divisão, estão bem definidas. As principais propriedades da adição e multiplicação operações ocorrem. Ambas são operações comutativas e associativas; para ambas existe elemento neutro racional; todo racional (com exceção do zero, na multiplicação) possui elemento inverso, com relação às duas operações; a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Por que então estender o sistema de números racionais? Por que temos que trabalhar na construção dos reais e irracionais? A razão está na necessidade de construir a reta numerada. Temos que desenvolver esta extensão com o objetivo de obter um quadro claro da relação entre números e a reta. Nesta relação entre reta e números estaremos desenvolvendo a noção de "completude", propriedade que o sistema dos racionais não tem. Construir a reta numerada completa implica construir um novo sistema numérico que inclui os racionais, como subsistema. A este novo sistema, chamamos Conjunto dos Números Reais. Este sistema estará completo, à medida que inclui todas as razões de quantidades geométricas – todos os valores que resultam de medidas.

Pode-se construir uma linha numerada, do seguinte modo.

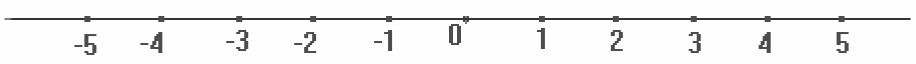
Uma linha horizontal é traçada, numa folha de papel. Supõe-se que esta linha é perfeita, sem falhas nem buracos.Esta linha só existe na imaginação, é claro, mas o desenho serve para ajudar a imaginação e comunicar informações.

Na linha, escolhemos um ponto qualquer e marcamos zero (0).

À direita escolhemos um outro ponto qualquer e marcamos 1.

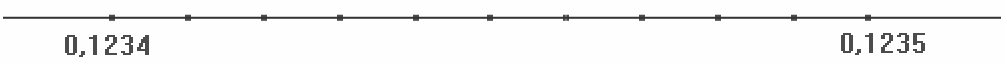
Usando a distância entre estes dois pontos como unidade básica, marcamos pontos adicionais, à direita, 2, 3, 4, 5,...

Então fazemos uma reflexão para a esquerda como se houvesse um espelho no 0, e marcamos, -2, -3, -4,....



Para posicionar outros números, pode-se dividir cada intervalo entre números inteiros da reta em dez parte; em cem partes, em mil partes. Sempre existe um espaço entre os pontos que correspondem a estas subdivisões.

Por exemplo, entre 0,1234 e 0,1235 existe um intervalo, repleto de pontos, que pode ser subdividido em dez partes, cem partes, mil partes, dez mil partes.



Nestas divisões sucessivas, aparecem pontos que correspondem a números decimais exatos. Estas sucessivas divisões marcam muitos pontos da reta, mas não todos. Por exemplo 1/3, que é 0,333...na forma decimal, não aparece.Aparecem 0,3; 0,33; 0,333 e outros, sempre com número finito de dígitos.

A cada nova divisão estes números ganham mais um dígito.

É preciso subdividir os intervalos sucessivamente, sem limite, para, aí sim encontrar todos os pontos da reta, E estes correspondem a todos os decimais, com número finito e infinito de dígitos. Num processo contínuo e infinito, todos os pontos da reta são alcançados.

Para cada ponto da reta vai existir um número decimal finito ou infinito, correspondente. A estes números chamamos de números reais. O conjunto dos números reais é o conjunto dos números que têm correspondência nos pontos da reta. Estes números têm origem em medidas e têm representação decimal, finita ou infinita.

Por outro lado, todos os números decimais têm um ponto correspondente na reta, que pode ser encontrado num processo semelhante de divisões sucessivas.

Ou seja, o conjunto dos números reais é constituído por todos os números decimais, finitos ou infinitos.

Pode-se mostrar que todos os números racionais podem ser representados por números decimais finitos ou infinitos e periódicos. Isto ocorre porque, no processo de divisão de dois números inteiros, os restos são inteiros. Se um resto da divisão for zero, é encontrado o resultado, um número decimal exato. Se nenhum resto é zero, em algum momento o resto irá se repetir, pois ele será um inteiro positivo menor do que o divisor. Por exemplo, se o divisor é 13, o resto só poderá ser 1,2,3,4,...12. No momento em que o resto se repetir, inicia-se um período. Ou seja, todo racional a/b, com a e b inteiros e b não nulo, resulta num decimal exato ou periódico.

Por exemplo, 1/13, na calculadora tem a seguinte forma decimal: 0,076923076. Esta parece exata. Mas, no cálculo manual, observa-se o período, que surge quando o resto 1 se repete.

```
  1  | 13____
 1     0,076923076923
 10
   9
   12
     3
      4
        1   aqui o resto 1 começa a se repetir
         10
           9
           12
             3
              4 ...  e assim sucessivamente.
```

Analogamente, é fácil ver que todo decimal exato ou periódico resulta em a/b.

Se o número decimal é exato, como por exemplo, 0,25, basta escrevê-lo como 25/100.

Se o número decimal é infinito e periódico faz-se um jogo de cálculos, usando produtos por potência base dez, subtrações adequadas e a propriedade distributiva, com o objetivo de eliminar o período e obter uma fração equivalente.

Por exemplo, para 0,252525..., basta multiplicá-lo por uma potência de 10 igual ao número de dígitos do período (10 potência 2) e subtrair o próprio número do resultado. Obtemos duas igualdades:

1) 100. 0,252525...- 0,252525...= 99. 0,252525... (Propriedade distributiva)
2) 100. 0,252525...- 0,252525...= 25,252525...- 0,252525...=25 (eliminação do período)

Comparando 1) e 2), obtemos: 0,252525...= 25/99

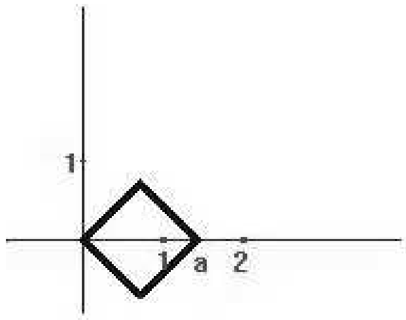
É preciso tratar com mais cuidado as formas decimais com período 9. Na verdade, nenhum quociente de inteiros resulta em 0,999..., por exemplo. Porém 0,999... ocupa na reta real o mesmo lugar que o número 1, ou seja é um racional. Usando o método acima, pode-se verificar que 0,999...=1.

Para outros exemplos, veja a bibliografia recomendada.

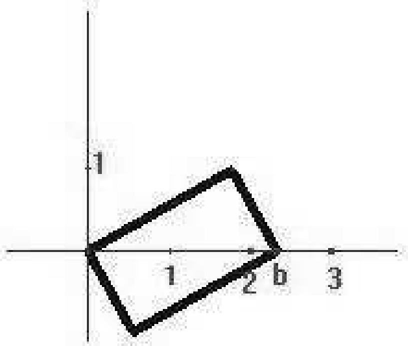
Ficando claro que todos os decimais exatos ou periódicos são racionais e a todo racional corresponde um decimal exato ou periódico, resta discutir os números que sobram. Na reta real existem números cuja forma decimal não é exata nem periódica.Estes chamam-se números irracionais.

Os números irracionais podem ser obtidos diretamente, a partir de construções decimais. Por exemplo: 0,10110111011110... Um número que foi construído segundo um padrão não periódico. Mas também podem ser obtidos a partir de medidas geométricas, simples.

Voltando à reta real, já construída, podemos encontrar pontos que são associados às raízes quadradas de inteiros positivos. Por exemplo, raiz de 2, corresponde a um ponto “a” entre 1 e 2, associado à diagonal do quadrado de lado 1.



Outro exemplo, raiz de 3, é associado a um ponto “b” entre raiz de 2 e 3, obtido pela rotação da diagonal do retângulo de lado maior 2 e lado menor 1.



Com este método, pode-se localizar sobre a reta real todas as raízes quadradas de inteiros, números obtidos a partir de medidas.

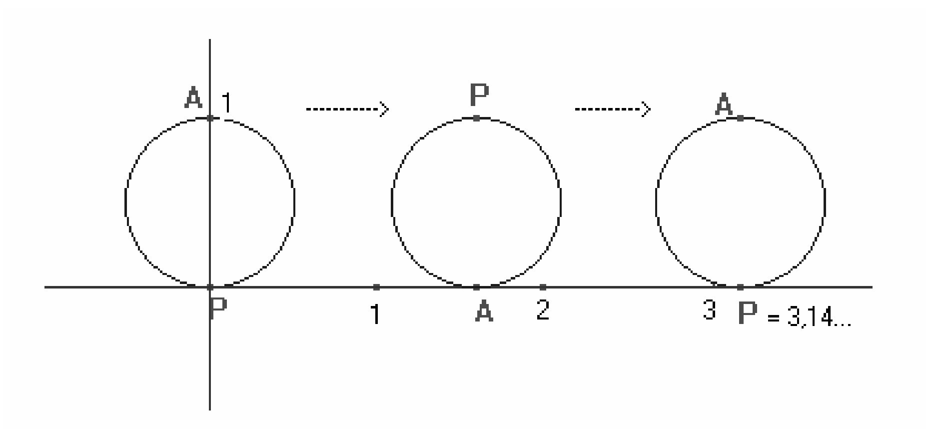
A calculadora fornece valores racionais aproximados para estas raízes. Na verdade, estes números não são racionais, pois possuem representação decimal infinita e não periódica.

Existem muitas demonstrações matemáticas deste fato. Para evitá-las, no nível fundamental, pode-se passar para uma espécie de “convencimento computacional”, utilizando cálculos sucessivos, com auxílio da calculadora.

Por exemplo, para raiz de 2, pode-se calcular os quadrados de uma seqüência de números decimais exatos que se inicia em 1, aumentando o número de casas decimais cada vez que o resultado superar 2. O processo pode continuar indefinidamente, sem chegar ao resultado exato. Pode-se chegar tão próximo de 2 quanto se queira, mas não se encontra este valor, porque Raiz de 2 é um decimal infinito e não periódico.

Para chegar ao pi , pode-se marcar um ponto P, entre o 3 e o 4, da seguinte forma.

Fazemos uma marca na circunferência de um círculo cujo diâmetro mede o mesmo que a distância entre o 0 e o 1, marcados na linha. Fixando a marca sobre o 0, rolamos o círculo, sobre a linha, até encontrar novamente a linha. O ponto de contato é chamado P.



P corresponde a pi, número maior que 3 e menor que 4.

PI corresponde à razão entre circunferência e diâmetro de uma circunferência.

A calculadora fornece para pi um número decimal exato, ou seja, uma aproximação racional.

Na verdade pi é irracional. Sua representação decimal é infinita e não periódico. Isso pode ser visto, mas não demonstrado.

Quando são criados novos números, é preciso também criar definições para operações aritméticas entre eles – adição, subtração, multiplicação, divisão – que preservem as propriedades das operações quando restritas aos números racionais.

Queremos que o novo sistema inclua os racionais, não apenas como um subconjunto, mas como um subsistema. Este objetivo é alcançado pela definição das operações, nos novos números, nos mesmos termos das operações nos racionais. Neste espírito, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não pode ser $\sqrt{5}$, pois a adição, nos reais, tem que ser compatível com a adição já conhecida nos racionais e, $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2+3 = 5$, claramente diferente de $\sqrt{13}$!

O próximo passo, após a construção do Conjunto dos Reais, é definir operações que sejam extensões coerentes daquelas já existentes nos Racionais. Neste texto, não tratamos deste tema.

5. PROPOSTA DE ENSINO DOS NÚMEROS REAIS E IRRACIONAIS

A presente proposta tem por objetivo tratar os conceitos de número real e de número irracional, a partir da necessidade de construção da reta numerada e de suas múltiplas aplicações.

Pretende-se construir e entender os elementos da reta real; relacionar a reta real com o conjunto de números reais; identificar e diferenciar os elementos que fazem parte do conjunto dos reais, números racionais e números irracionais.

Detalhamos, a seguir, uma seqüência de oito atividades que podem ser levadas para a sala de aula de sétima ou oitava série, no todo ou em partes.

Cada atividade é antecedida por seus objetivos, decrição breve e recursos didáticos necessários. Ao final, a conclusão é dirigida para o professor, como m auxílio para sua intervenção final.

ATIVIDADES

1. Análise de Gráficos; destaque para a reta real.
2. Construção da reta; números decimais.
3. Racionais,irracionais e representação decimal
4. Medidas na reta
5. Raízes inexatas na reta e Teorema de Pitágoras

6. Raiz de 2
7. PI
8. Racionais e irracionais

ATIVIDADE 1: Análise de Gráficos; destaque para a reta real.

Objetivos:

1. destacar as retas numéricas que compõem o gráfico;
2. fazer a leitura das informações que as retas e o gráfico fornecem;
3. destacar os diferentes modos de enumerar pontos da reta;
4. definir número real a partir da reta numerada;

Descrição:

Os alunos analisam gráficos variados (VER ANEXOS), encontrados em revistas, jornais e livros das outras ciências. A análise é orientada para destacar as retas numéricas que compõem o gráfico, as informações que as retas e o gráfico fornecem e os diferentes modos de enumerar pontos da reta.

Recursos didáticos: gráficos e questões

Desenvolvimento:

1º Gráfico

O gráfico em anexo foi encontrado no Jornal Zero Hora (22/11/2003) e trata da curva de crescimento de meninos e meninas (ver anexo 5)

Analise-o para responder às seguintes questões:

a) Qual é a informação do gráfico?
b) Que grandeza tem seus valores numéricos representados na reta numerada horizontal?

c) Que grandeza tem seus valores numéricos representados na reta numerada vertical?

d) Localize os seguintes valores, da grandeza idade na reta horizontal:

e) Localize os seguintes valores, da grandeza estatura na reta vertical.

f) Utilize a régua para encontrar a unidade de medida utilizada na numeração da reta horizontal e da reta vertical. Tente explicar esta escolha.

Conclusão da Atividade:

Para construir gráficos utilizam-se retas. Estas são numeradas de acordo com uma unidade de medida a ser escolhida, adequada para as grandezas a serem representadas. A numeração da reta é uma correspondência entre seus pontos e números. A cada ponto da reta corresponde um número. O conjunto de todos os números que são associados a pontos da reta é chamado de Conjunto dos Números Reais. A reta numerada é chamada de reta real.

ATIVIDADE 2- Construção da reta e números decimais.

Objetivos:

a) traçar a reta real usando números decimais;

b) utilizar, ordenar e diferenciar números reais na forma decimal exata, infinita periódica e infinita não periódica;

c) estabelecer relação entre pontos da reta, números decimais e números reais;

d) definir número real a partir dos números decimais.

Descrição:

Os alunos constróem a reta real, a partir de uma unidade de medida dada, iniciando pela localização dos números inteiros. Analisam e localizam, na reta, números na forma decimal, diferenciando a forma decimal exata, infinita e periódica e infinita não periódica.

Recursos didáticos: papel, lápis e régua.

Desenvolvimento:

Seguindo os passos seguintes você irá construir uma reta real.

1. Trace uma linha horizontal.

Escolha um ponto qualquer e marque zero (0).

À direita escolhemos um outro ponto qualquer e marque 1.

Usando a distância entre estes dois pontos como unidade básica, marque pontos adicionais, à direita, 2, 3, 4, 5,...

Faça uma reflexão para a esquerda como se houvesse um espelho no 0, e marque : -2, -3, -4,....

2. Para posicionar outros números, pode-se dividir cada intervalo entre números inteiros da reta em dez parte; em cem partes, em mil partes. Sempre existe um espaço entre os pontos que correspondem a estas subdivisões.

Amplie o intervalo entre 0 e 1, tomando toda o comprimento da folha e divida-o em 10 partes, marcando os pontos de 0,1 a 0,9.

Marque os pontos médios: 0,15; 0,25; 0,35. E assim sucessivamente até 0,95.

3. Vamos marcar números entre 0,1 e 0,15.

Para isto amplie este intervalo, tomando toda o comprimento da folha e divida-o em 10 partes, marcando os pontos de 0,105; 0,110; 0,115; 0,120; 0,125; 0,130 sucessivamente até 0,150.

Nestas divisões sucessivas, aparecem pontos que correspondem a números decimais exatos, aqueles que têm número finito de casas decimais.

3. Marque o número 0,1222, ampliando o intervalo de 0,120 a 0,125, tomando todo o comprimento da folha.

Marque o número 0,12222, ampliando o intervalo de 0,1222 a 0,1223.

Se pudéssemos prosseguir com estas subdivisões, poderíamos marcar na reta o número 0,1222..... com infinitas casas decimais e com o dígito 2 repetido. Números que apresentam repetição de dígitos um número infinito de vezes são dito decimais periódicos.

Poderíamos também marcar um número como 0,12112111211112.....com infinitas casas decimais e sem período. Este é um decimal infinito e não periódico.

É preciso subdividir os intervalos sucessivamente, sem limite, para encontrar todos os pontos da reta, E estes correspondem a todos os decimais, com número finito e infinito de dígitos. Num processo contínuo e infinito, todos os pontos da reta são alcançados.

Conclusão da atividade:

A cada nova divisão da reta os números ganham mais um dígito. Pode-se ampliar e dividir os intervalos infinitas vezes. Assim podemos marcar pontos da reta que correspondem a números decimais com número infinito de casas após a vírgula.

Para cada ponto da reta vai existir um número decimal finito ou infinito, correspondente. A estes números chamamos de números reais. O conjunto dos números reais é o conjunto dos números que têm correspondência nos pontos da reta. Estes números têm representação decimal, finita ou infinita.

ATIVIDADE 3: Números racionais, irracionais e representação decimal

Objetivos:

1. reconhecer números racionais; distinguir razões e frações quanto ao seu significado;
2. identificar os tipos de expansões decimais que um número racional pode ter: finita ou infinita periódica;
3. comparar resultados do cálculo manual com o cálculo feito na calculadora;
4. desenvolver espírito crítico com relação à calculadora, percebendo que as calculadoras trabalham com aproximações e, por isso, o período muitas vezes fica “escondido”;
5. elaborar e justificar, usando a análise dos restos das divisões, a afirmação de que todo número racional tem representação decimal exata ou periódica.

Descrição

O professor define (ou relembra) número racional, aquele que pode ser escrito como a razão de dois números a/b, com b não nulo. Neste momento, distingue os significados de razão e fração.

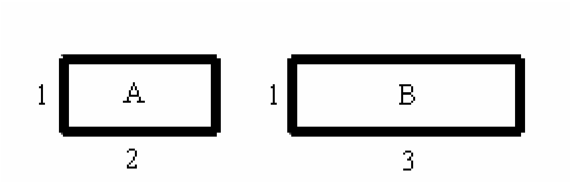
Os alunos calculam quociente de números inteiros, manualmente e com auxílio de calculadoras, comparando os resultados e identificando os limites da calculadora.

Desenvolvimento

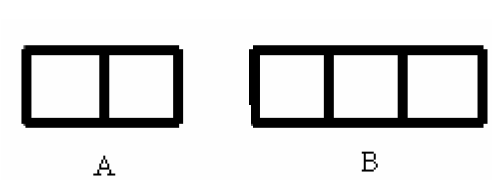
1. Exposição oral inicial.

Recorrer a diferentes exemplos para tratar dos significados de razão e de fração.

Exemplo 1: Dados dois retângulos A e B, A com lados medindo 1 e 2 cm e B com lados medindo 1 e 3 cm, diz-se que a razão entre suas áreas é 2/3. Em outras palavras, a relação entre suas áreas é de 2 para 3. Razão é termo que indica relação entre duas grandezas e tem notação a/b, com b não nulo.



Por outro lado, desenhando o retângulo B, composto por três quadrados de 1 centímetro de lado, podemos dizer que o retângulo A, com lados 1 e 2 cm, corresponde a



uma certa parte de B, uma fração de B, igual a 2/3. Usa-se o termo fração para relacionar parte e todo.

Um número racional é um número real que pode ser expresso como razão de dois inteiros, a/b, com b não nulo. Por quê? Porque é impossível dividir por zero, e esta razão a/b indica um quociente uma divisão entre dois inteiros.

Pode-se pensar nestes números como razões entre duas grandezas ou como frações, partes do todo. O termo racional deriva do termo razão,mas muitas vezes, falamos em números fracionários.

2. Questões para os alunos, em grupos:

2.1. Calcule à mão, e depois na calculadora, as expansões decimais dos seguintes números: ½; 1/8; 1/3 , 1/7 , 1/17 e 17/3.

2.2. Período é uma seqüência de um ou mais algarismos presente no número decimal que se repete infinitamente e sucessivamente, sem alteração. Período indica repetição. Identifique os períodos dos números anteriores, se o número for periódico.

2.3. Compare os resultados à mão e na calculadora. Quais deles são iguais e quais são diferentes? Tente explicar as diferenças.

2.4. Todos os números racionais têm representação decimal exata ou infinita periódica. Você concorda? Tente explicar porque?

Conclusão da atividade

Verificamos que as respostas da calculadora são aproximadas. Existem casos, como 1/17, em que o cálculo manual evidencia a existência de período enquanto a calculadora não mostra o período. Em outros casos, como 17/3, a calculadora mostra uma parte do período, 6, com um dígito final 7, resultado da aproximação para cima. Todos os resultados, na calculadora, mostram número finito de casas decimais, contrariando o que se vê no cálculo manual.

Na verdade, muitos números racionais têm número infinito de casa após a vírgula e, neste caso, sempre apresentam período. Isto ocorre devido à repetição dos restos da divisão. Analisando os cálculos manuais, verifica-se que, na divisão de a por b, o período aparece quando o resto se repete e esta repetição sempre ocorre, pois o resto é um número inteiro, positivo e menor que b.

Conclui-se que todo número racional pode ser escrito na forma decimal exata ou infinita periódica.

O conjunto R dos números reais é formado pela união de dois conjuntos: o conjunto dos racionais e o conjunto dos não racionais.

Os números não racionais são chamados irracionais. Saio aqueles cuja forma decimal é infinita e não periódica.

ATIVIDADE 4 - A reta real e as medidas geométricas

Objetivo:

a)relacionar medidas geométricas com pontos da reta real;

b) salientar que a unidade de medida escolhida para dar início à construção da reta numerada reta não precisa ser necessariamente 1 cm, e pode ser escolhida, de acordo com a conveniência;

Descrição

Os alunos se dedicam à construção da numerada com diferentes unidades de medida. Começam pela localização dos números inteiros. Logo a seguir, são solicitados a localizar números racionais na sua forma fracionária. Num segundo passo, utilizam figuras geométricas para marcar pontos que correspondem às diagonais de retângulos e ao comprimento do círculo de diâmetro 1, com auxílio de régua e compasso.

Recursos didáticos

Conjuntos com pecinhas coloridas de cartolina. Cada conjunto numa cor diferente. As peças são construídas a partir de uma medida M cm, tomada como unidade de medida.

Construção das peças:

1 barrinha com M cm;

1 quadrado M x M;

1 retângulo M x2M;

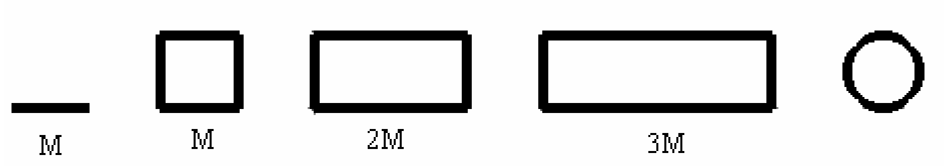
1 retângulo M x 3M;

1 circunferência de diâmetro igual a M.

Cada cor de conjunto tem uma medida M diferente (M=2, 3, 4, 5, 6 cm).

Régua, compasso.

Pequeno barbante (para medir o comprimento da circunferência).



Desenvolvimento:

1. Trace uma reta qualquer e escolha o ponto de referência para ser o zero.

2. Utilizando a barrinha como unidade, numere a reta a partir do zero no sentido da direita.

3. Marque na reta o lugar dos números: ½; ¾; 1/3; 0,2; 0,5; 0,33333...

4. Utilizando os retângulos, marque a medida de sua diagonal na reta, indicando-os por A, B, C (coloca-se o retângulo com um de seus vértices na origem, e através de uma rotação faz-se coincidir o vértice oposto com a reta, os quais são os extremos da diagonal).

06. Dê o valor aproximado para as medidas das diagonais marcadas.

07. Marque um ponto sobre a circunferência. Utilize o barbante para medir o comprimento da circunferência. Marque esta medida sobre a reta, partindo do zero, indicando o ponto por D.

08. Repita os procedimentos para o lado esquerdo da reta, construindo a parte negativa da reta.

Conclusão da atividade:

Sobre a reta real, marcamos pontos correspondentes a diferentes medidas geométricas. Há pontos que correspondem aos números inteiros e às frações. Há pontos que correspondem às medidas de diagonais e de circunferências. Estes pontos pertencem à reta numerada, portanto correspondem a números reais. Que números são estes?

ATIVIDADE 5: Raízes Inexatas na reta e Teorema de Pitágoras

Objetivos:

1. reconhecer o significado e a importância do Teorema de Pitágoras;
2. relacionar Teorema de Pitágoras com raízes inexatas;
3. marcar na reta os pontos que correspondem às raízes inexatas de números inteiros positivos;
4. reconhecer as raízes como números irracionais

Descrição

Os alunos montam quebra-cabeças para chegar à relação entre áreas de quadrados contruídos com os lados de um triângulo retângulo. Chegam à expressão matemática do Teorema de Pitágoras. O professor pode interromper os trabalhos para explicitar o Teorema. Parte-se para aplicações.

Recursos Didáticos:

Quebra-cabeças (em Anexos)

Calculadora.

Folha impressa com a expansão decimal de aproximadamente umas 100 casas da raiz quadrada de 2 (em Anexos).

Desenvolvimento:

Atenda às seguintes questões:

1. Monte os quebra-cabeças e tente mostrar a relação entre as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo dado.

2. Calcule as diagonais dos retângulos dados na atividade anterior, usando o Teorema de Pitágoras.

3. Verifique na calculadora o valor das diagonais. Substitua esses valores encontrados na calculadora, na reta real. Estes valores correspondem aos pontos A, B e C.

4. Multiplique os valores encontrados na calculadora por ele mesmo. O que você pode concluir com isso? Por que você acha que a multiplicação não resultou no número que estava dentro da raiz?

Conclusão da atividade

As raízes inexatas de números positivos resultam de medidas geométricas. Tais números têm lugar na reta real, portanto são números reais. Utilizando a calculadora, encontramos a representação decimal das raízes com 6 ou 8 casas. No entanto, estes valores são apenas aproximações. Por isso, por exemplo, ao calcular raiz quadrada de 2 e multiplicar o número encontrado no visor por si mesmo, não se encontra 2. Este número não é o verdadeiro valor de raiz de 2. Computadores encontraram este valor com centenas de casas decimais. O número destas casas é infinito. Além disso, raiz de 2 não apresenta período. Pode-se verificar o mesmo para todas as raízes inexatas. As raízes inexatas de números inteiros positivos são números reais irracionais.

ATIVIDADE 6: Raiz quadrada de dois

Objetivo

Convencer-se que $\sqrt{2}$ é número irracional.

Descrição

Os alunos calculam $\sqrt{2}$ de diferentes maneiras, comparam os resultados e concluem que este número não é racional, pois, na forma decimal, apresenta número infinito de casas e não mostra período.

Recursos Didáticos:

Calculadora

Desenvolvimento:

01. Calcule o valor de $\sqrt{2}$ na calculadora. É possível aceitar esta resposta? Multiplique este valor por ele mesmo? Esta resposta não é 2, porque o resultado da calculadora para Raiz quadrada de 2 é uma aproximação.

02. Para tentar alcançar o verdadeiro valor de $\sqrt{2}$, pode-se tentar calcular por meio de aproximações sucessivas.

O método de cálculo por aproximações sucessivas é o apresentado a seguir:

Sabemos que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2.

a) Tente 1,5. Eleve ao quadrado.

1,5 é maior do que $\sqrt{2}$.

b) Tente 1,4. Eleve ao quadrado.

1,4 é menor do que $\sqrt{2}$.

c) Tente 1,45.

1,45 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

d) Tente 1,41

1,41 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

e) Tente 1,42.

1,42 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

f)Tente 1,415

1,415 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

f) Tente 1,414.

1,414 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

g) Tente 1,4145.

1,4145 é maior ou menor do que $\sqrt{2}$?

Podemos continuar com estes cálculos muitas e muitas vezes. Nunca encontraremos um número exato de casas decimais para $\sqrt{2}$. Também nunca encontraremos um período.

.

3. Que tipo de número é Raiz quadrada de 2?

Primeira pergunta: $\sqrt{2}$ é inteiro?

Se $\sqrt{2}$ fosse um número inteiro, deveria existir um inteiro n tal que

$$n^2 = 2.$$

Utilize a calculadora para listar, na tabela abaixo, os quadrados dos primeiros vinte números inteiros. Algum destes números quadrados é igual a 2?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

***** Conclua: $\sqrt{2}$ é inteiro? Sim ou Não?

Segunda pergunta? $\sqrt{2}$ é racional? Pode ser escrito como uma fração?

Se $\sqrt{2}$ fosse uma fração então existiriam dois inteiros, a e b, tais que $a^2/b^2 = 2$.
Então teríamos, dois inteiros tais que $a^2 = 2.\ b^2$.
Ou seja, teríamos dois números quadrados tais que um é o dobro do outro.
Utilize a calculadora para listar, na tabela acima, o dobro de todos os números quadrados. Algum destes números é também um número quadrado? Existem dois quadrados tais que um é o dobro do outro?
Conclua: $\sqrt{2}$ é racional? Sim ou não?

Conclusão da atividade

Os números que têm lugar na reta real são denominados números reais. Estes números têm origem nas medidas. Entre eles existem números racionais, escritos da forma de uma razão a/b, onde a e b são números inteiros. Todos os racionais podem ser escritos na forma decimal exata ou periódica. Os números reais cuja forma decimal não é exata nem é periódica são irracionais. $\sqrt{2}$ é um exemplo de número irracional. Todas as raízes não exatas de números inteiros positivos são irracionais. Por exemplo, as raízes quadradas de 3, 5, 6, 7, 8,...etc.

ATIVIDADE 7: PI

Objetivos:

1. definir PI como uma constante que representa a relação C/D entre Circunferência e Diâmetro do círculo;
2. marcar na reta real o ponto que corresponde a PI;
3. reconhecer PI como um número real irracional.

Descrição

Os alunos tomam medidas de circunferência (C) e diâmetro (D) de diferentes objetos circulares e comparam os resultados obtidos para a razão C/D.

Recursos didáticos:

Fita métrica; objetos cilíndricos variados.

Calculadora.

Folha impressa com representação decimal de PI com muitas casas (em Anexos)

Desenvolvimento:

Atenda às seguintes questões:

1. Meça a circunferência e o diâmetro de alguns objetos cilíndricos.

2. Divida a medida da circunferência pela medida do diâmetro, e anote os resultados em uma tabela. Utilizando a fórmula do comprimento da circunferência, calcule novamente essas medidas dos objetos usados anteriormente.

Objeto	Medida Circunferência C	Medida Diâmetro D	Cálculo Circunferência C1 = $2\pi R$	Razão C/D	Razão C1/D
Lata de Nescau					
Lata leite Moça					
Lata azeite					

3. Faça novamente a divisão da medida do perímetro pela medida do diâmetro. Você vai encontrar um número que se repete. Uma constante chamada PI.

5.Calcule o valor de PI na calculadora e compare com os valores obtidos no item (02).

6. Localize PI na reta real. É o ponto D, marcado na reta da atividade 4.

Conclusão da atividade

A reta real construída na atividade 4 pode ser agora completada. Em lugar dos pontos A, B, C e D teremos raízes de 2, 5, 10 e o PI. Estes números são reais. Todos os números que provêem de medidas são reais. O número dado pela calculadora para PI (ou π) é uma aproximação. Computadores já calcularam centenas de casa decimais para este número e não encontraram período. A representação decimal de PI tem número infinito de casas decimais e é não periódica.

ATIVIDADE 8: Números racionais ou irracionais

Objetivo

Reforçar a distinção entre números racionais e irracionais

Descrição

Os alunos respondem questões a respeito de números reais, classificando-os em racionais ou irracionais e justificando a resposta.

Desenvolvimento:

1. PI é um número real, pois tem origem na medida da cirunferência e tem um lugar na reta real. PI é racional ou irracional?

2. Decida se o número dado na tabela é racional ou irracional e justifique:

	√225	√2	√3	√2/6	Π/2	0,424242...	0,121221222...
Racional ou Irracional							

3.Trace uma reta e numere-a convenientemente. Tome-a como a reta real. Dê exemplos de racionais e os coloque numa reta numerada. Igualmente dê exemplos de irracionais e os coloque na reta.

4.Justifique porquê cada exemplo que você deu é ou não racional.

Conclusão da atividade

O conjunto R dos números reais é formado pela união de dois conjuntos: o conjunto dos racionais e o conjunto dos irracionais. As calculadoras não conseguem distinguir estes números, pois só fornecem informações exatas, números com 6 ou 8 dígitos. Os decimais com número infinito de casas escapam às calculadoras. Os decimais com infinitos dígitos e com período são números racionais e podem ser representados na forma de razão, a/b, com a e b inteiros. Os decimais com infinitos dígitos que não evidenciam período são números irracionais. Alguns destes números correspondem às raízes inexatas de números inteiros e ao resultado das operações entre elas. Outros correspondem a números ditos transcendentes como PI e muitos outros.

Existem muitos números irracionais, muito mais do que aqueles que foram trabalhados neste texto. É possível criar números irracionais com facilidade, basta inventar números decimais não exatos que não apresentem período.

Neste trabalho, procuramos deixar claro que, apesar da dificuldade de encontrar nas máquinas e nas medidas um número com infinitas casas decimais, tais números existem.

6.CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com relação às teorias de aprendizagem que revisitamos, neste estudo, devemos dar a devida importância ao construtivismo. A predominância do construtivismo piagetiano na pesquisa educacional dos últimos 20 anos teve como principal conseqüência desenvolver uma nova visão da aprendizagem, que não se reduz simplesmente à transmissão dos fatos. O que pode ser aprendido é fortemente restringido pelas concepções iniciais dos sujeitos – pelas situações propostas e pelos meios de ação que eles dispõem para enfrentá-las.

A idéia construtivista também contribui para explicar os limites das estratégias de ensino que atribuem um papel dominante ao que o professor fala.

No entanto, a concepção construtivista piagetiana é considerada hoje insuficiente para modelar de forma satisfatória os processos de aprendizagem de Matemática, porque não dá conta das dimensões sociais e culturais desta aprendizagem.

As teorias de educação matemática dos didáticos franceses apontam dificuldades de aprendizagem devidas ao fato de que a maior parte do nosso conhecimento permanece fortemente contextualizado, isto é, dependente das situações em que eles surgiram. Além disso, pesquisas mostram que a aprendizagem se funda, de maneira decisiva, na flexibilidade do funcionamento matemático via articulação de pontos de vista, registros de representações, competências e habilidades matemáticas.

Nesta linha, foi desenvolvida esta proposta para ensino de irracionais: articulando a geometria com a aritmética; utilizando registros gráficos e computacionais; recorrendo à história da Matemática e à construção de quebra-cabeças. Oferecendo diferentes contextos e diferentes situações para propiciar a construção do conceito de número irracional e real, para que os alunos não se mantenham dependentes de um só tipo de situação. Além disso, nosso plano diminui o espaço das exposições orais, abrindo para as atividades orientadas.

Com relação ao ambiente cultural, concepções prévias e meios de ação dos sujeitos, encontramos, neste trabalho, duas escolas públicas estaduais muito diferentes. O programa de oitava série de uma e de outra era diferente. O meio social diferente mostrava seus efeitos nas salas de aula e no desempenho e modo de agir dos estudantes. O que havia de comum entre elas era disposição das crianças para o novo, a receptividade frente à novidade, a vontade de aprender.

Fruto das duas experiências, a seqüência didática sofreu muitas modificações, tentando dar conta das diferenças.

Consideramos a experiência bem sucedida e com condições de ser reproduzida.

7. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. Ed. Blücher, São Paulo, 2001.

COOKE, Roger. **The History of Mathematics – A Brief Course**. USA: John Wiley & Sons, 1997.

DANTE, Luiz. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2002, 296p.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics**. USA: Holt, Rinehart and Wiston, Inc. , 1969.

IMENES, Luis Márcio. **Os números na História da Civilização**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Editora Scipione, 1989.

LONGEN, Adilson. **Matemática em Movimento – 7ª Ser**ie – São Paulo: Editora do Brasil, 1999, 245 páginas;

MATSUBARA, Roberto; ZANIRATTO, Ariovaldo Antônio. **Big Mat Matemática. História, Evolução, Conscientização**. 7ª série. São Paulo:IBEP

Ministério da Educação e do Desporto; Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília. Outubro/1997

NCTM - NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **More topics in Mathemtics for elementary school teachers.** Thirtieth Yearbook.Virginia:The National Council of Teachers of Mathematics. 1974. 2nd Edição. 584 p.

PAIS, Luiz Carlos**. Didática da Matemática. Uma influência francesa**. S.Paulo: Autêntica, 2ed, 2001, 126 p.

GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI JR. **A Conquista da Matemática.** 8ª série. São Paulo: FTD, 1998.

http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/histomatematica/histonum.html acesso online em 07/04/2004

http://www.somatematica.com.br/numeros.phtml acesso online em 07/04/2004

http://www.professorrobson.hpg.ig.com.br/historia%20numeros%20negativos.htm acesso online em 07/04/2004

http://www.interaula.com/matweb/fundam/104/mod104.htm acesso online em 12/04/2004

ANEXOS

1. **Raiz de 2**

2. **Quebra-cabeças para Teorema Pitágora**

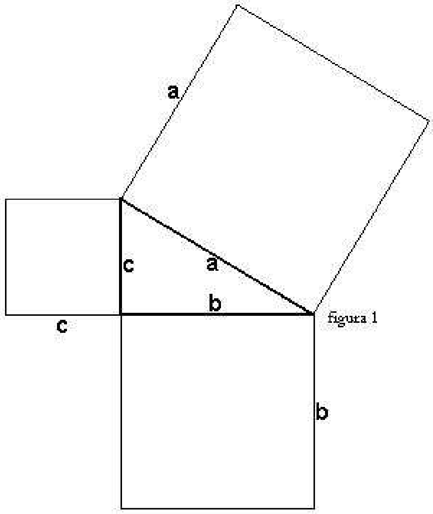


figura 1

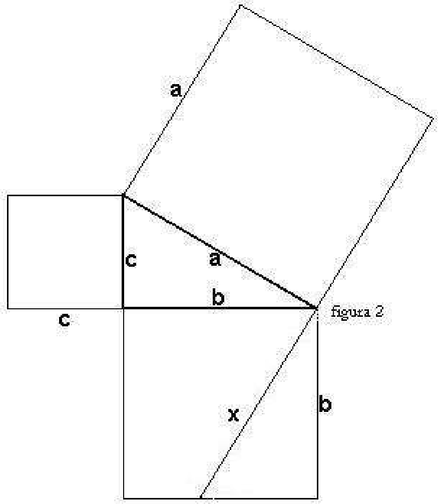


figura 2

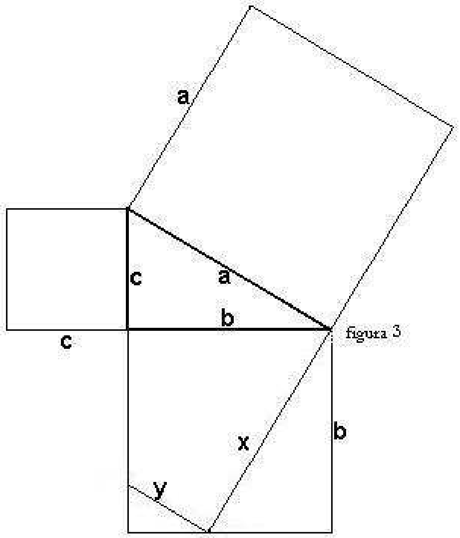


figura 3

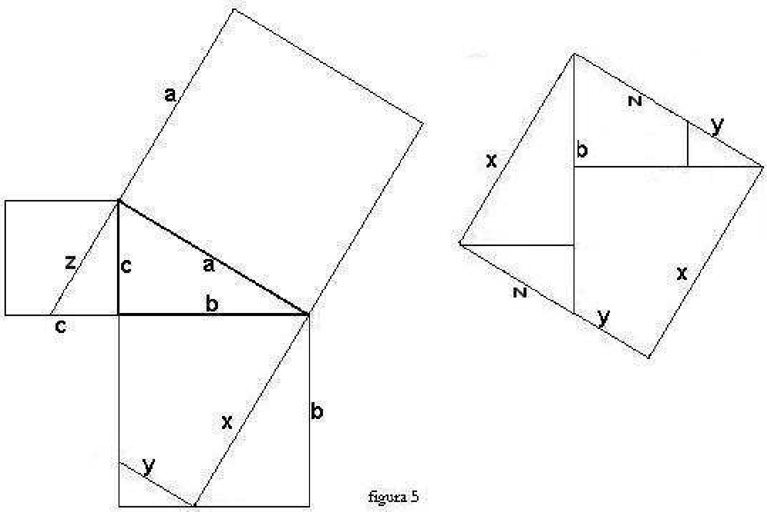
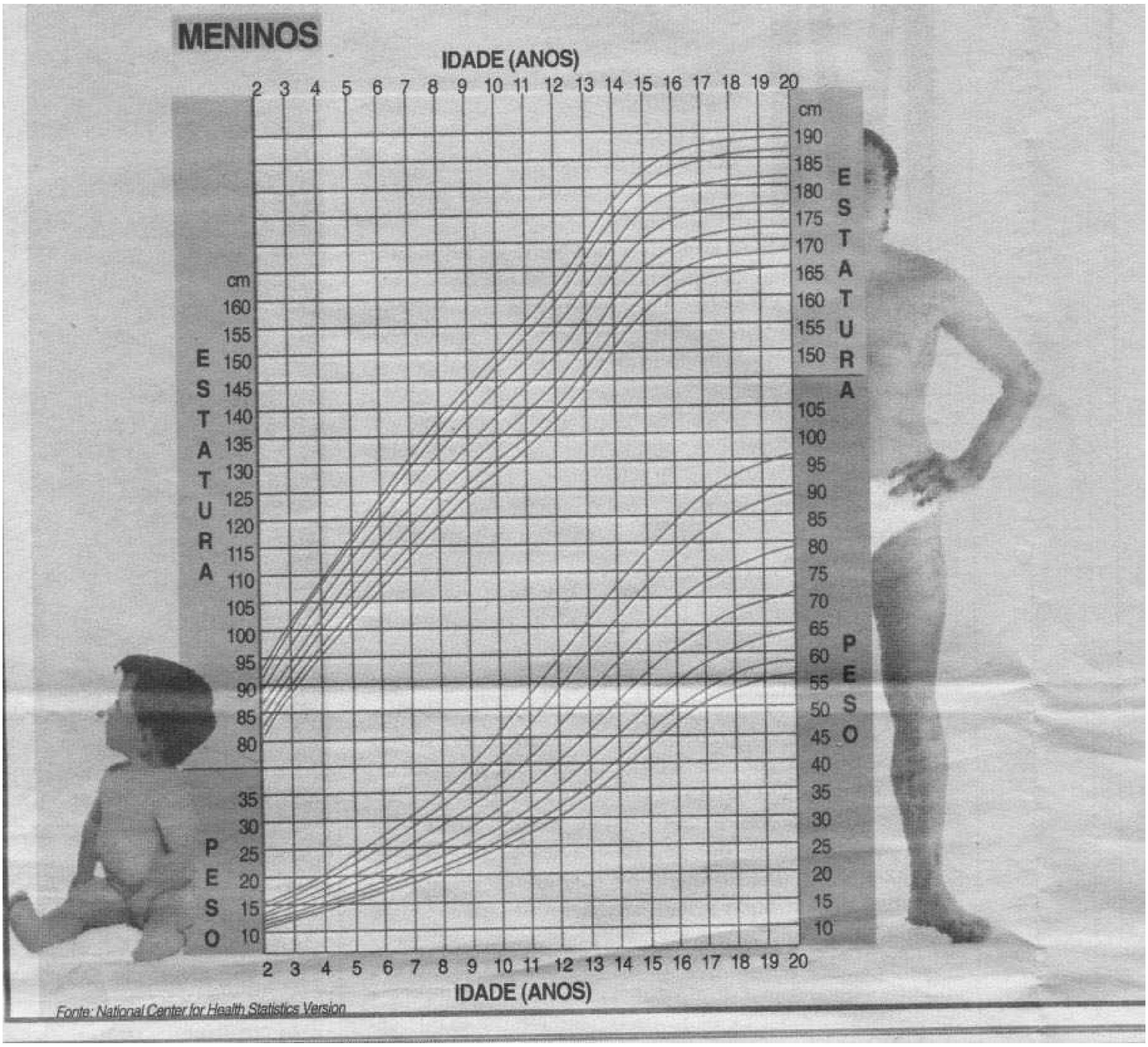
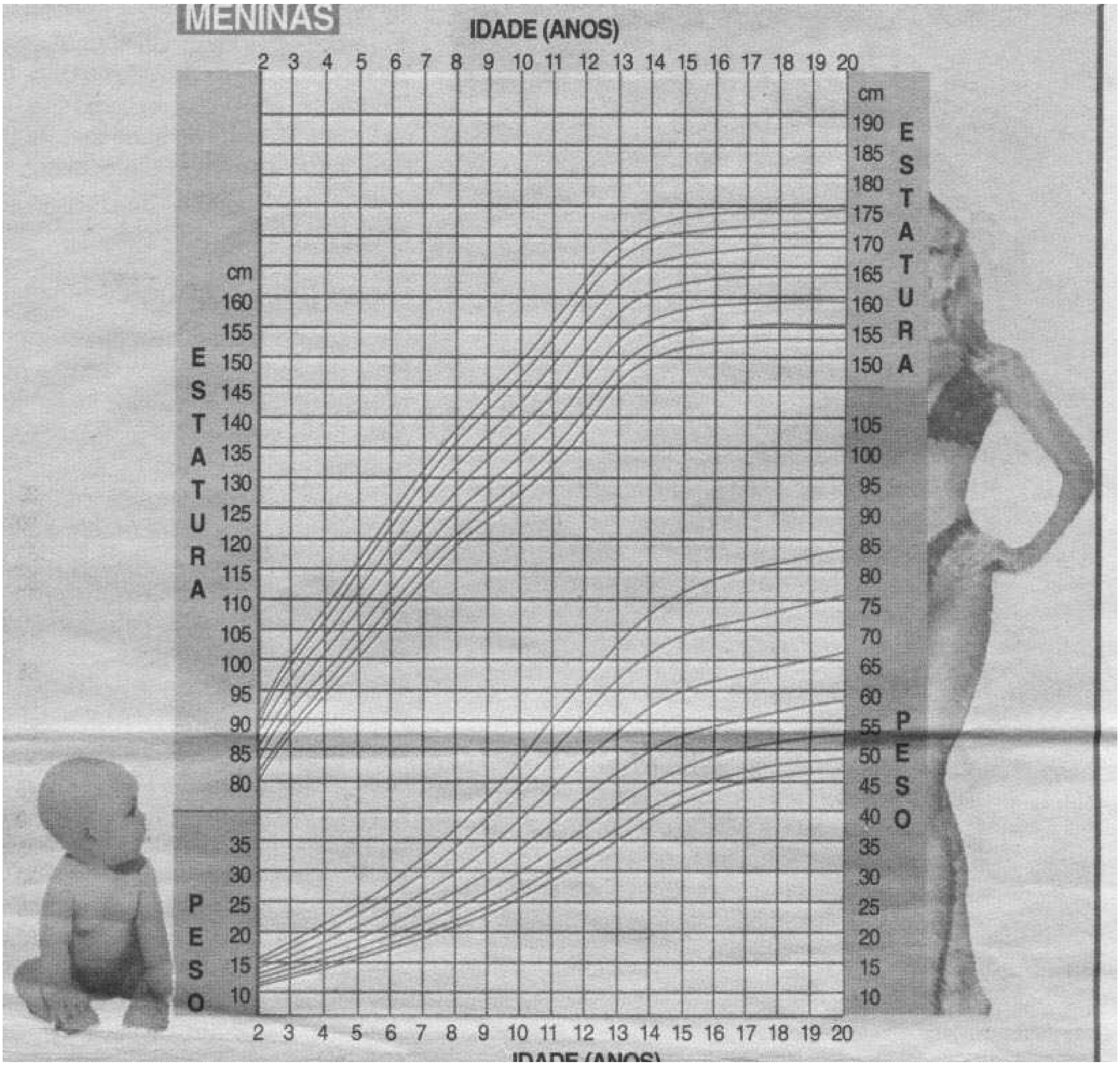


figura 5

3. Gráficos:


MENINOS
IDADE (ANOS)
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
ESTATURA
cm
PESO
Fonte: National Center for Health Statistics Version


MENINAS
IDADE (ANOS)
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
ESTATURA
cm
160 155 150 145 140 135 130 125 120 115 110 105 100 95 90 85 80
PESO
35 30 25 20 15 10
cm
190 185 180 175 170 165 160 155 150
ESTATURA
105 100 95 90 85 80 75 70 65 60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10
PESO
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

4. PRÉ –TESTE ASSUNTO: Números irracionais
Projeto Articulação UFRGS-ESCOLA
EEEF. Professora Luiza Teixeira Lauffer 8ª série 2004/2

Nome: ______________________________ Idade:_______

1. Dê a representação decimal dos seguinte números?

a)1/3

b)15/17

2. Escreva os seguintes números como uma RAZÃO de dois inteiros, a/b:

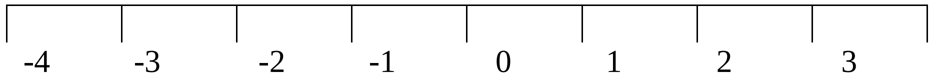
a)3,75

b)1,111...

c)0, 525252....

3. Todos os números até aqui apresentados são chamados de RACIONAIS, porque podem ser escritos na forma a/b, que é chamada às vezes de RAZÃO e às vezes de FRAÇÃO. Dê pelo menos 5 exemplos de números racionais que tu conheces.

4. Marque na reta numerada abaixo os pontos que correspondam aos números citados no exercício 1, 2 e 3:



... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
...