Material Didático

Série

Estatística Básica

Texto:

Percentagens, Relativos e Índices

Prof. Lori Viali, Dr.

SUMÁRIO

PERCENTAGENS, RELATIVOS E ÍNDICES

1. PERCENTAGENS

1.1. INTRODUÇÃO

Denominamos ***taxa*** a uma fração positiva cujo denominador é cem (100).

Por exemplo: 5/100, 1/100 ou 50/100.

As frações acima são lidas: cinco por cento, um por cento e cinqüenta por cento respectivamente.

A fração 1/100 é lida ***por cento*** e representada pelo sinal %. Assim, as frações acima são escritas da seguinte forma: 5%, 1% e 50%. Observa-se, portanto, que o sinal % eqüivale à fração 1/100 ou ao decimal 0,01, pois 5% = 5/100 = 5.1/100 = 5.0,01 = 0,05.

Normalmente a taxa é um número entre "zero" e "um", mas nada impede que ela seja superior a um, como por exemplo: 150/100 ou 150 por cento, 200/100 ou duzentos por cento.

A taxa aplicada a um valor dá origem a percentagem ou porcentagem. Assim 5% de 100 é igual a 5 (cinco), isto é, 5 é a percentagem.

Observações:

1. Uma taxa restrita ao intervalo [0; 1], denomina-se *proporção*;

2. A soma de duas taxas é ainda uma taxa, isto é: a% + b% = (a/100) + (b/100) = (a + b)/100 = (a + b)%. Em particular: a% + 0% = a% = 0% + a%, ou seja; zero é o elemento neutro para a soma de taxas.

3. A taxa não é multiplicativa, pois: a%.b% = (a/100).(b/100) = (a.b)/(100.100) = [(a.b)%]%. Deste modo, por exemplo: 2%.5% = (10%)% = 0,1% e não como seria de supor 10%. Também: 100%.100% = [(100.100)%]% = 100% e não 10000% como seria de esperar.

A principal utilização das taxas ou percentagens é nas comparações temporais, como, por exemplo, variações de preços de um artigo, variações nas quantidades produzidas de um bem, taxas de juros, preços de ações, etc.

Suponha-se que se deseja comparar a situação "a" de *chegada* com a situação "b" de *partida*. Pode-se escrever:

a - b, que é denominado ***desvio*** ou ***variação absoluta*** ou então (a - b)/b que seria o ***desvio relativo unitário*** ou ainda [(a - b)/b].100 que é denominada ***variação relativa.***

1.2. EQUIVALÊNCIAS

O desvio relativo é mais cômodo, pois independe de unidade e, por isso, é mais utilizado. Tem-se:

(a - b)/b = a/b - 1 ou então [(a - b)/b].100 = 100.(a/b) - 100 que são as taxas unitária e percentual, ou então, os ***multiplicadores***:

a/b ou (a/b).100

Diz-se que o multiplicador está associado à taxa.

Se (a - b)/b = i então a/b = 1 + i e a = b(1 + i).

"i" é a taxa e "1 + i" o multiplicador.

Dizer que uma quantidade aumenta de t% é dizer que ela é multiplicados por:

1 + t/100.

A unidade que é somada a t/100 é causa de enganos, principalmente em "taxas" superiores a 100%. Se é evidente que:

- Um aumento de 100% eqüivale a dobrar a quantidade, isto é, multiplicar por 1 + 100/100 = 2, já não é tão claro que;
- Um aumento de 200% seja correspondente a multiplicar a quantidade por 3, isto é, 1 + 200/100 = 3 e muito menos que;
- Um aumento de 900% corresponda a multiplicar a quantidade por 10, isto é, 1+ 900/100 = 10.

1.3. ASSIMETRIA

Se "a" é a situação de chegada, "b" a de partida e "i" a taxa então: a = b.(1 + i). Assim a/b = 1 + i ou (a - b)/b = i.

No entanto, b/a = 1/(1 + i) que não é igual a "1- i".

Desta forma, um aumento de "i" por cento não é eliminado por uma baixa dos mesmos "i" por cento.

Com efeito, para eliminar um aumento de 25%, basta uma baixa de 20% e não de 25%. Se por exemplo:

a/b= 1,25 = 1 + 0,25 = 1 + 25/100 = 1 + 25%, então:

b/a = 1/1,25 = 100/125 = 4/5 = 0,8 = 1 - 0,20 = 1 - 20/100 = 1 - 20%.

Assim, "o efeito de um aumento de t% é eliminado por uma baixa menor do que t%", ou ainda, dada a taxa de aumento t, a taxa de baixa que anula este aumento é dada pela taxa t' = t/(1 + t) ou t = t'/(1 - t').

Com efeito:

a = b.(1 + t) = b.[1 + t'/(1 - t')] = b.[(1 - t' + t')/(1 - t')] = b.[1/(1 - t')].

Assim:

b/a = 1 - t'

Analisando a relação acima, verifica-se que:

$\lim\limits_{t\to\infty} t' = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{1+t}$ = 1 = 100%, isto é a baixa não ultrapassa aos 100%, mesmo quando a alta é ilimitada.

Tem-se também:

$\lim\limits_{t'\to\infty} t =$ = t'/(1 - t') = ∝

Se ao contrário, verificar-se o que ocorre quando as taxas se tornam cada vez menores pode-se ver que:

$\lim\limits_{t'\to 0} t = \lim\limits_{t'\to 0} \frac{t'}{1-t'}$ = 0/1 = 0, ou ainda

$$\lim_{t\to 0} t' = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t} = 0/1 = 0$$

Assim, pode-se concluir que a medida que a *alta* se torna cada vez menor a *baixa* que a anula também se torna cada vez menor. Em outras palavras, para taxas pequenas a diferença entre a *alta* e a *baixa* que a anula se torna cada vez menor. Isto é:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t'\to 0}} t - t' = \lim_{\substack{t\to 0\\ t'\to 0}} \frac{t'}{1-t'} - \frac{t}{1+t} = 0 - 0 = 0$$

<u>Exemplos:</u>

1. Se "a" é 50% superior a "b, então "b" é apenas t' = 0,50/(1 + 0,50) = 0,50/1,50 = 5/15 = 1/3 = 0,333 ... = 33, 33%, inferior a "a'. Também, como 1 + 0,50 = 3/2, o inverso será: 2/3 = 1 - 1/3 = 1 - 0,3333;

2. Se “a” é 100% superior a “b”, então “b” é apenas t’ = 1/(1 + 1) = 1/2 = 0,50 = 50% inferior a “a”. Também, como 1 + 1 = 2, o inverso é 1/2 = 1 - 1/2 = 1 - 0,50 = 1 - 50%.

3. Se “a” é 900% superior a “b” então “b” é t’ = 9/(1 + 9) = 9/10 = 90% inferior a “a”. Também, como 1 + 9 = 10, o inverso será: 1/10 = 1 - 9/10 = 1 - 0,9 = 1 - 90%.

4. Se “a” é 2% superior a “b” então “b” é t’ = 0,02/(1 + 0,02) = 2/102 = 1/51 = 0,0196 = 1,96% inferior a “a”. Também, como 1 + 0,02 = 1,02, o inverso será” 1/1,02 = 100/102 = 50/51 = 1 - 1/51 = 1 - 1,96%.

1.4. AUMENTOS E BAIXAS SUCESSIVAS

Quando é necessário acumular altas ou baixas sucessivas, ou mesmo, alternar altas e baixas, deve-se multiplicar os *multiplicadores*, para obter o *multiplicador* global.

Assim, por exemplo:

1. Uma alta de 20%, seguida de outra de 30%, não dá um aumento total de 50% e sim de 1,30.1,20 = 1,56 ou 56%. Ou seja: (1 + i).(1 + i’) = 1 + i + i’ + i.i’;

2. Uma alta de 10%, seguida de outra de 10% dão 21% e não 20% como se poderia pensar a princípio.

Quando se tratar de alta seguida de baixa ou vice-versa, ou ainda de baixa seguida de outra baixa, os multiplicadores das baixas devem ser inferiores a “um” e a regra anterior continua valendo.

Assim, por exemplo:

1. Uma baixa de 10% seguida de outra de 20% eqüivale a uma única de 28% e não de 30%, pois:
(1 - 0,10).(1 - 0,20) = 0,90.0,80 = 0,72 = 1 - 0,28;

2. Uma alta de 50%, seguida de uma baixa de 60%, eqüivale a uma baixa de 40%, pois: (1 + 0,50).(1 - 0,60) = 1,50.0,40 = 0,60 = 1 - 0,40;

3. Uma alta de 60% seguida de uma baixa de 50% eqüivale a uma baixa de 20%, pois: (1 + 0,60).(1 - 0,50) = 1,60.0,50 = 0,80 = 1 - 0,20.

Observação:

Em alguns casos, quando parece que se deve subtrair os *multiplicadores*, deve-se, na realidade, dividi-los, que é a situação recíproca de quando se acha que se deve somar os *multiplicadores* e, na verdade, deve-se multiplicá-los. Isto ocorre porque o quociente (1 + t)/(1 - t’) não é igual a 1 + t - t’.

Assim se, por exemplo, se num determinado período os salários aumentaram 50%, mas a inflação no mesmo período foi de 25% e se quer determinar qual foi o aumento real de salário, isto é, o aumento descontada a inflação? Ou ainda, qual foi o ganho real ou aumento do poder aquisitivo do salário? Tem-se:

1,50/1,25 = 150/125 = 6/5 = 1,20 = 1 + 20%, ou seja, 20% e não, como pode parecer a princípio,
50% - 25% = = 25%.

2. RELATIVOS

Dados dois números reais “a” e “b”, denomina-se ***números relativos*** ou simplesmente ***relativos*** aos números: a/a = 1 e b/a se “a” for escolhido como ***unidade*** ou ***base***. Da mesma forma, se “b” for escolhido como *unidade* ou *base*, se terá, então, os relativos: b/b = 1 e a/b.

A escolha da base não recai necessariamente sobre um dos dois valores envolvidos, mas pode envolver qualquer outro valor, tal como, por exemplo, a média entre os dois valores.

2.1. TIPOS DE RELATIVOS

Pode-se ter relativos de vários tipos. Mas os mais comuns são os relativos de preços e os relativos de quantidade.

2.1.1. RELATIVO DE PREÇO OU PREÇO RELATIVO.

Seja “p_0” o preço de um determinado artigo no tempo t = 0 e “p_n” o preço, deste mesmo artigo, no tempo t = n.

Define-se, ***preço relativo*** *do Artigo A no tempo t = n, com base no tempo t = 0*, como sendo o quociente:

$$\mathbf{p(0, n) = p_n / p_0}$$

Exemplo:

O litro de leite em 2003 custava Cr$ 0,80 e em 2004 Cr$ 1,00. *O relativo do litro de leite em 2004 com base em 2003* é: p(03, 04) = 1,00 / 0,80 = 1,25 ou 125%. Ou seja, o preço do litro de leite em 2004 é 25% maior do que em 2003. Também, se poderia calcular p(04, 03) = 0,80 / 1,00 = 0,80 = 1 - 0,20. Ou seja, o leite em 2003 custava 20% menos do que em 2004.

2.1.2. RELATIVO DE QUANTIDADE OU VOLUME RELATIVO

Seja q_0 a quantidade produzida de um determinado artigo “A” no tempo t = 0 e q_n a quantidade produzida, deste mesmo artigo, no tempo t = n. A quantidade relativa produzida (ou vendida, consumida, exportada, etc.) do artigo “A” no tempo “n” em relação ao tempo “0” é definida como sendo:

$$\mathbf{q(0, n) = q_n/q_0}$$

2.1.3. RELATIVO DE VALOR OU VALOR RELATIVO

Seja “p” o preço de um artigo “A” e “q” a quantidade produzida deste mesmo artigo. Denomina-se ***valor total*** ou simplesmente ***valor*** ao produto v = p.q.

Define-se ***valor relativo** de um artigo "A" no tempo t = n, com **base** no tempo t = 0*, como sendo o quociente:

$v(0, n) = (p_n q_n) / (p_0 q_0) = v_n / v_0$,

ou também:

$v(0, n) = v_n / v_0 = (p_n / p_0) / (q_n / q_0) = p(0, n). q(0, n)$.

Desta forma, o *relativo de valor* pode, também, ser caracterizado como sendo o produto do *relativo de preço* pelo *relativo de quantidade*.

2.2. PROPRIEDADES DOS RELATIVOS

2.2.1. IDENTIDADE

Um relativo de um determinado período, com base no mesmo período é sempre igual a unidade ou 100%, isto é:

$p(0, 0) = p(1, 1) = 1$

2.2.2. REVERSIBILIDADE NO TEMPO

Um relativo é sempre reversível, isto é, quando invertemos a situação *corrente (ou atual)* com a situação *base* o índice inverte-se, ou seja:

$p(0, n) = 1 / p(n, 0)$,

ou ainda, pode-se escrever esta propriedade da seguinte forma:

$p(0, n).p(n, 0) = 1$.

2.2.3. TRANSITIVIDADE OU PROPRIEDADE CIRCULAR (CÍCLICA)

Um relativo é sempre transitivo, ou seja:

Se "0", "1" e "2" são 3 períodos de tempo sucessivos, então:

$p(0, 1).p(1, 2) = p(0, 2)$

ou também:

$p(0, 1).p(1, 2).p(2, 0) = 1$

2.3. APRESENTAÇÃO DOS RELATIVOS

Os relativos de preços, quantidade ou valor são, normalmente, apresentados em seqüências que podem ser:

(a) de base fixa;

(b) de base móvel.

2.3.1. RELATIVOS DE BASE FIXA

Considere-se os valores:

X_0, X_1, X_2, ..., X_n como sendo os preços (ou quantidades) de um artigo "A" nas épocas t = 0, 1, 2, ..., n.

As razões (quocientes):

X_0 / X_0, X_1 / X_0, X_2 / X_0, ..., X_n / X_0 são os relativos de base fixa, em t = 0, do artigo "A", nos tempos t = 0, 1, 2, ..., n.

Tabela 1 - Relativos de base fixa

Anos	Preços	Relativos (Base t = 0)
0	X_0	X_0 / X_0
1	X_1	X_1/X_0
...	...	...
n	Xn	Xn/X_0

Exemplos:

Seguem abaixo dois exemplos de seqüências de relativos. Note-se que na tabela 2 (exemplo 1) os relativos são unitários. Na tabela 3 (exemplo 2) os relativos são expressos em percentagem, o que é mais usual. Note-se, ainda, que o símbolo % não foi utilizado. Quando os relativos são apresentados em séries, por meio de tabelas, o símbolo % não é utilizado. Pode-se perceber que os relativos estão em percentual pelo seus valores.

Exemplo 2.1

Relativos de preços, de base fixa (base = 2001), expressos em valores unitários.

Tabela 2 - Produção do artigo "A"- RS - 2000/2004

Anos	Preços	Relativos (Base = 91)
00	200	0,80
01	250	1,00
02	300	1,20
03	500	2,00
04	550	2,20

Exemplo 2.2

Relativos de quantidade, de base fixa (base 2000), expressos em percentagem

Tabela 3 - Produção do artigo "A"- RS - 2000/04

Anos	Produção	Relativos (Base = 90)
00	500	100
01	750	150
02	800	160
03	900	180
04	1500	300

Observando-se a tabela do exemplo 1 (tabela 2), pode-se constatar que: o preço do artigo "A" em 92 era 20% maior do que o de 2001. O preço do mesmo artigo em 2000 era 20% menor do em 2001 (base), pois 0,80 = 1 - 0,20.

Na tabela do exemplo 2.2 (tabela 3), destaca-se que em 2001 a produção do artigo "B" foi 50% superior a de 2000. A produção do artigo "B" em 2004 foi 200% superior a de 2000.

2.3.2. RELATIVOS DE BASE MÓVEL

A seqüência dos relativos de base móvel (também chamados de relativos em cadeia ou números elo) é obtida de modo semelhante aos relativos de base fixa. Só que a base, nesse caso são sucessivamente os valores: X_0, X_1, X_2, ... , X_{n-1}, nos tempos t = 0, 1, 2, ..., n.

Tabela 4 - Relativos de base móvel

Anos	Preços	Relativos(Base Móvel)
0	X_0	—
1	X_1	X_1 / X_0
2	X_2	X_2 / X_1
...	...	...
n	X_n	X_n / X_{n-1}

Abaixo, seguem, dois exemplos de relativos de base móvel. O primeiro apresentado uma seqüência de relativos de preços e o segundo uma seqüência de relativos de quantidades.

Exemplo 2.3

Relativos de preços, de base móvel, expressos em valores unitários.

Tabela 5 - Preços do artigo "A"- RS - 2000/04

Anos	Preços	Relativos (Base Móvel)
00	200	—
01	250	1,25
02	400	1,60
03	500	1,25
04	800	1,60

Exemplo 2.4

Relativos de quantidade, de base móvel, expressos em percentagem.

Tabela 6 - Produção do artigo "B" - RS - 2000/04

Anos	Produção	Relativos
00	500	—
01	750	150
02	840	112
03	1050	125
04	945	90

Observando-se o exemplo 2.3 (tabela 5) pode-se ver que 2001 apresentou um aumento de 25% em relação a 2000. Que 2003 apresentou um aumento de 25% em relação a 2002, etc. De forma semelhante, pela observação da tabela 6 (exemplo 2.4) pode-se verificar que o ano de 2002 apresentou uma produção do artigo "B" 12% superior ao ano de 2001 e que o ano de 2004 apresentou uma produção 10% (1- 0,90 = 0,1) menor do que 2003.

2.4. MUDANÇAS DE BASE

Ao se considerar uma série de relativos poderá ser necessário estabelecer comparações, que não estão disponíveis na série apresentada. Se os valores originais (preços, produção, etc.) estiverem disponíveis, isto não trará maiores problemas, pois bastará calcular os novos valores necessários. Mas, normalmente, uma vez obtida a série de relativos os valores originais não mais estão disponíveis. Neste caso, poderá ser necessário realizar mudanças de base, isto é, mudar de uma base fixa para outra base fixa, de uma base móvel para uma fixa ou vice-versa.

Por exemplo, dispondo dos relativos de base fixa em um determinado ano, pode-se estar interessado em fazer comparações com valores que não os do ano tomado como base. Neste caso será necessário fazer uma mudança para uma nova base. Também, poderá ser necessário fazer comparações ano a ano a partir de relativos de base fixa, caso em que se teria que fazer uma mudança de relativos de base fixa para relativos de base móvel. Por último pode ocorrer a situação em que se precise fazer comparações com um determinado ano, mas não se dispõe dos valores dos relativos de base fixa, situação está que ocasiona a necessidade de efetuar uma mudança de uma série de relativos de base móvel para uma de base fixa.

2.4.1. MUDANÇA DE RELATIVOS DE UMA BASE FIXA PARA OUTRA BASE FIXA.

Dispondo-se de uma série de relativos com base no período "t" deseja-se obter uma nova série com base em t'. Para tanto é suficiente apenas dividir toda a série de relativos (com base em t) pelo relativo da nova base (t'). A tabela 7, abaixo, ilustra o procedimento. Tendo os relativos de base fixa em 2001 (segunda coluna) quer-se mudar a base para o ano de 2003. Isto pode ser feito, simplesmente, dividindo a coluna 2 (dos relativos com base em 2001) pelo valor 2,00, que é o relativo do ano de 2003.

Tabela 7 - Exemplo de mudança de uma série de base fixa para outra fixa

Anos	Relativos (Base = 01)	Relativos (Base = 03)
00	0,80	0,40
01	1,00	0,50
02	1,20	0,60
03	2,00	1,00
04	2,80	1,40

2.4.2. MUDANÇA DE RELATIVOS DE BASE FIXA PARA BASE MÓVEL

Dispondo de uma série de relativos de base fixa (com base no período "t") deseja-se obter a série de relativos de base móvel. Para tanto toma-se cada relativo de base fixa e divide-se pelo anterior. Obviamente o primeiro relativo de base móvel não poderá ser calculado, a menos que se disponha do valor original anterior.

A tabela oito ilustra o procedimento. Neste caso os relativos de base fixa (segunda coluna) estão com base no período t = 2001. Para obter os relativos encadeados (coluna 3) o procedimento será o mesmo não importa qual tenha sido o período tomado como base na série de base fixa.

Tabela 8 - Exemplo de mudança de uma série de base fixa para móvel

Anos	Relativos (Base = 01)	Relativos (Base = 03)
00	80	—
01	100	125
02	120	120
03	180	150
04	234	130

2.4.3. MUDANÇA DE RELATIVOS DE BASE MÓVEL PARA BASE FIXA.

Dispondo de uma série de relativos com base móvel deseja-se obter uma nova série com base em um período t = t_0. Para tanto é necessário fazer uso das propriedades circular e reversível. Na verdade, isto pode ser feito de duas maneiras. A mais simples é obter a série de relativos com base no primeiro período da série e depois, então, fazer a mudança para a base desejada. Neste caso, a única propriedade empregada seria a circular. A outra forma, um pouco mais elaborada, é obter os relativos na base desejada diretamente. Nesta situação, será necessário o emprego das propriedades circular e reversível em conjunto.

A tabela 9 ilustra o procedimento. Dispondo dos relativos de base móvel (segunda coluna) quer-se obter a série de relativos de base fixa no período t = 91.

Tabela 09 - Mudanças de relativos de base móvel para fixa

Anos	Relativos (Base Móvel)	Relativos (Base = 2001)
00	—	80
01	125	100
02	120	120
03	150	180
04	130	234

3. NÚMEROS ÍNDICES

3.1. INTRODUÇÃO

Na prática, não existe muito interesse na comparação de preços e quantidades de um único artigo, como é o caso dos relativos, mas sim na comparação de conjuntos de preços de artigos entre diferentes pontos no tempo. Por exemplo, para se ter uma idéia do custo de vida não é suficiente saber a variação do preço da carne, mas é necessário também o do arroz, do leite, da batata, etc. É claro que todos estes preços poderiam ser fornecidos em formas de tabelas. Mas esta solução além de pouco prática seria bastante falha em termos informativos.

O que se objetiva é obter um único número que represente a variação de todo um conjunto de preços de bens e serviços em conjunto com as quantidades consumidas ou utilizadas em diferentes pontos no tempo. Um número com estas características é denominado de ***número índice*.**

A dificuldade da construção e obtenção de um número índice vai além do que a simples escolha de uma fórmula matemática para calculá-lo. Assim, por exemplo, deve-se determinar que *bens e serviços* serão avaliados e em que quantidades. É claro que este não é um problema de fácil solução, pois esta escolha não pode se dar de forma arbitrária, sob pena do valor resultante ficar completamente dissociado da realidade. Para avaliar os bens e serviços consumidos deve-se tomar uma amostra aleatória de famílias *típicas* que vão informar quais os produtos e serviços mais consumidos e em que quantidade. Também o que vem a ser uma família típica precisa ser bem caracterizado.

O próprio processo de amostragem apresenta dificuldades, pois é necessário delimitar o universo, i.é, a população objetivo. Assim é necessário decidir que tipo de família será amostrada, pois é notório, que a estrutura de consumo varia com a renda. Desta forma, uma família com renda de 20 salários mínimos, investe mais em lazer, em transporte (individual) do que uma família com renda de 5 salários mínimos.

Uma vez equacionado o problema dos componentes e das quantidades do índice, deve-se escolher ainda o período base e a periodicidade do índice (semanal, mensal ou anual).

Após resolvidas as questões acima restaria, ainda, a escolha da expressão matemática do índice, isto é, da fórmula. É claro que a escolha depende, em parte, dos objetivos do índice, mas é desejável do ponto de vista teórico, que os números índices satisfaçam as mesmas propriedades dos relativos (índices de uma única utilidade).

Nenhum índice proposto até hoje satisfaz a todas as propriedades desejáveis. Por isso é que, na prática, a fórmula adotada, depende mais das "facilidades" que ela proporciona (em termos de cálculo) do que das propriedades matemáticas que ela satisfaz.

A seguir, serão apresentados os principais critérios utilizados, juntamente, com algumas considerações acerca das propriedades de cada uma destas fórmulas utilizadas.

Para simplificar a notação e facilitar a compreensão será suposto que todos os índices sejam de preços. No entanto, facilmente pode-se estender estas mesmas expressões para se obter índices de quantidades, de valor, etc.

3.2. NOTAÇÃO

Cada índice será representado pela letra "I" e terá como sub-índice a inicial do nome. Este nome geralmente está associado com a pessoa que propôs a fórmula ou, então, com a maneira de obtenção desta fórmula. Suponha-se que:

p_0 = preço de um determinado artigo na época base (época "0").

q_0 = quantidade de determinado artigo na época base (época "0").

p_t = preço de certo artigo numa época diferente da época base (época "t").

q_t = quantidade de certo artigo numa época diferente da época base (época "t").

Observação: Na realidade as notações acima foram propositadamente simplificadas, pois, por exemplo, na época "t" onde se escreve p_0 se deveria escrever p_0^i, isto é, preço do artigo "i" na época base com i = 1, 2, ... , n. Mas é praxe eliminar certos sub-índices, bem como, os indicativos dos somatórios de forma a tornar a representação menos confusa.

3.3. ÍNDICES (DE PREÇOS) SIMPLES

Os índices simples são caracterizados por envolverem apenas os preços e não as quantidades consumidas de cada produto levado em consideração.

3.3.1. ÍNDICE ARITMÉTICO

É a média aritmética dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época *base*.

$$I_A = \frac{1}{n}\sum p(0,\, t) \;=\; \frac{1}{n}\sum (p_t / p_0)$$

É um índice muito fácil de ser calculado, mas que apresenta a desvantagem da média aritmética, que é a de sofrer a influência de valores extremos, isto é, grandes variações nos preços de um único produto. É um índice que não é reversível e nem transitivo.

3.3.2. ÍNDICE GEOMÉTRICO

É a média geométrica dos relativos de cada produto, calculados em relação à época *base*.

$$I_G = \sqrt[n]{\prod (p_t / p_0)} = \sqrt[n]{\prod p(0,t)}$$

O índice geométrico simples costuma também ser definido através da média aritmética dos logaritmos dos relativos, i.é, o índice geométrico é um índice aritmético, só que dos logaritmos dos relativos ao invés dos relativos. Este índice é reversível e transitivo.

3.3.3. ÍNDICE HARMÔNICO

É a média harmônica dos relativos, ou ainda, é o inverso da média aritmética dos inversos dos relativos.

$$I_H = = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum (p_0 / p_t)} = \frac{n}{\sum (p_0 \ / p_t)} = \frac{n}{\sum p(t,\ 0)}$$

O índice harmônico da mesma forma que o aritmético não é nem reversível e nem transitivo.

3.3.4. ÍNDICE MEDIANO

O índice mediano é obtido através da mediana dos relativos.

$$I_M = me\{\ p_t / p_0\ \} = me\{\ p(0, t)\ \}$$

A vantagem deste índice é a de não ser influenciado por variações extremas de preços de um único produto. Uma desvantagem é que é necessário ordenar os relativos para obtê-lo. Este índice não é reversível e nem transitivo.

3.3.5. ÍNDICE AGREGATIVO SIMPLES (OU ÍNDICE DE BRADSTREET)

É o mais antigo dos números índices e é obtido pela proporção entre a variação na época atual e a época base.

$$I_{AG} = \Sigma p_t \ / \ \Sigma p_0$$

Este índice é reversível e é transitivo.

Exemplo 3.1

Por meio deste exemplo, ilustra-se o cálculo e as propriedades dos cinco índices vistos. Para tanto, vai-se considerar um conjunto de quatro artigos com os respectivos preços obtidos em 3 épocas diferentes, conforme tabela 10 (dez).

Tabela 10 - Preços de 4 artigos nas épocas $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$

ARTIGOS	Preço por kg			p2 / p1	p3 / p2	p3 / p1	p1 / p2	p2 / p3	p1 / p3
	1	2	3						
A	8	10	9	1,2500	0,9000	1,1250	0,8000	1,1111	0,8889
B	4	4,5	5	1,1250	1,1111	1,2500	0,8889	0,9000	0,8000
C	10	8	11	0,8000	1,3750	1,1000	1,2500	0,7273	0,9091
D	5	5,5	6	1,1000	1,0909	1,2000	0,9091	0,9197	0,8333
TOTAL	**27**	**28**	**31**	**4,2750**	**4,4770**	**4,6750**	**3,8480**	**3,6551**	**3,4313**

A tabela 11 (onze) apresenta os resultados dos cálculos dos índices vistos. Usando estes valores é possível conferir as propriedades mencionadas de cada um dos índices.

Tabela 11 - Valores em diversos períodos dos índices vistos

Índices / Períodos	Aritmético	Geométrico	Harmônico	Mediano	Agregativo
2/1	106,88	105,47	103,95	111,95	103,70
3/2	111,93	110,67	109,44	110,10	110,71
3/1	116,88	116,72	116,57	116,26	114,71
1/2	95,20	94,81	93,57	89,90	96,43

Pela tabela pode-se observar também que:

$I_A \geq I_G \geq I_H$, isto é, os índices conservam as propriedades das médias, onde, a maior é a média aritmética e a menor a média harmônica.

Com os índices mediano e agregativo não é possível estabelecer uma comparação deste tipo.

(b) Quanto as propriedades, a tabela 12 (doze) fornece um resumo.

Tabela 12 - Propriedades dos índices vistos

Índices / Propriedades	Aritmético	Geométrico	Harmônico	Mediano	Agregativo
Reversibilidade	Não	Sim	Não	Não	Sim
Transitividade	Não	Sim	Não	Não	Sim

3.4. ÍNDICES DE PREÇOS PONDERADOS

A principal desvantagem dos índices anteriores é a de considerar todos os artigos com a mesma importância. Para que o índice se torne mais realista, uma vez que é sabido que os produtos não são todos consumidos em igual quantidade, é necessário ponderar cada artigo participante do índice. Essa ponderação, normalmente, é realizada pelas quantidades consumidas, obtidas através de uma amostragem probabilística. Estas quantidades podem ser utilizadas de forma absoluta ou então, como é mais comum, pela sua importância relativa no conjunto de quantidades.

Desta forma, se "q_i" é a quantidade consumida, produzida, vendida, etc. de determinado artigo, pode-se utilizar no índice, o valor absoluto "q_i" ou então seu valor relativo $\alpha_i = q_i / \Sigma q_i$, de tal modo que, $\Sigma\ \alpha_i = 1 = 100\%$. Esta opção é a preferida pois dá condições de verificar a contribuição do artigo cuja ponderação é α_i na variação final do índice.

Sejam "α" as ponderações associadas aos artigos cujos preços são p_0 e p_t nas épocas "0" e "t" respectivamente. Então os índices anteriores ficam:

3.4.1. ÍNDICE ARITMÉTICO PONDERADO

É a média aritmética dos relativos, de cada produto, ponderado pela quantidade α.

$$I_{AP} = \frac{1}{\Sigma\alpha}\Sigma\frac{p_t}{p_0}.\alpha \ = \ \Sigma\frac{p_t}{p_0}\alpha \ = \ \Sigma\alpha.p(0,\ t)$$

3.4.2. ÍNDICE GEOMÉTRICO PONDERADO

É a média geométrica dos relativos de cada produto, ponderados pela quantidade α.

$I_{GP} = \sqrt[\Sigma\alpha]{\prod(p_t/p_0)^{\alpha}} \ = \ \prod(p_t/p_0)^{\alpha}$, pois a soma dos valores de α é igual a "um".

3.4.3. ÍNDICE HARMÔNICO PONDERADO

É a média harmônica dos relativos, ou ainda, é o inverso da média aritmética dos inversos dos relativos, ponderada pelas quantidades α.

$$I_H = \frac{1}{\frac{1}{\sum\alpha}\sum\alpha(p_0 / p_t)} = \frac{\sum\alpha}{\sum\alpha.p(t,0)} = \frac{1}{\sum\alpha.p(t,0)}$$

3.4.4. ÍNDICE AGREGATIVO PONDERADO

É o quociente entre o produto das quantidades pelos preços da época atual e o produto das quantidades pelos preços da época base.

$$I_{AGP} = \frac{\sum\alpha.p_t}{\sum\alpha.p_0}$$

Exemplo 3.2

Suponhamos que no exemplo anterior os artigos A, B, C e D, tivessem, respectivamente, os seguintes pesos: 20%, 30%, 10% e 40%. Então os índices da época "t" sobre a época "0" seriam:

Tabela 13 - Preços das utilidades A, B, C, D - Porto Alegre - 2003

Artigos	Pesos	1	2	Relativos	Relativos Ponderados	p0	pt
A	0,20	8	10,0	1,250	0,2500	1,60	2,00
B	0,30	4	4,5	1,125	0,3375	1,20	1,35
C	0,10	10	8,0	0,800	0,0800	1,00	0,80
D	0,40	5	5,5	1,100	0,4400	2,00	2,20
Total	1	27	28	—	1,1075	5,80	6,35

- Índice aritmético ponderado

$$I_{AP} = \sum\frac{p_t}{p_0}\alpha = 1{,}1075 = 110{,}75\%$$

- Índice geométrico ponderado

$$I_{GP} = \prod(p_t / p_0)^{\alpha} = 1{,}0456.1{,}0360.0{,}9779.1{,}0389 = 1{,}1005 = 110{,}05\%$$

- Índice harmônico ponderado

$$I_H = \frac{1}{\sum\alpha.p(t,0)} = 1/\ (0{,}1600 + 0{,}2667 + 0{,}1250 + 0{,}3636) = 1/\ 0{,}9153 = 1{,}0925 = 109{,}25\%$$

- Índice agregativo ponderado

$$I_{AGP} = \frac{\sum\alpha.p_t}{\sum\alpha.p_0} = 6{,}35\ /\ 5{,}80 = 1{,}0948 = 109{,}48\%$$

Colocando os resultados numa tabela, bem como os resultados dos índices anteriores, pode-se verificar a influência exercida pelas ponderações, bem como as diferenças entre os vários critérios no resultado final.

Tabela 14 - Índices simples e ponderados

Índices	Aritmético	Geométrico	Harmônico	Agregativo
Simples	106,88	105,47	103,95	103,70
Ponderado	110,75	110,05	109,25	109,48

Observando a tabela verifica-se que todos os índices ponderados apresentaram valores superiores aos índices não ponderados. Isto ocorreu porque justamente o artigo "C" que não aumentou, ao contrário diminuiu, recebeu a menor ponderação. No índice simples ele tinha uma ponderação de 25% (pois todas são iguais), enquanto que no índice ponderado o seu peso no conjunto de bens baixou para apenas 10%.

3.5. ÍNDICES ESPECIAIS (AGREGATIVOS PONDERADOS)

São índices do tipo agregativo onde as ponderações são executadas pelas quantidades da época base ou da época atual, ou ainda de outras formas. Esses índices são conhecidos, normalmente, pelos nomes dos seus formuladores.

3.5.1. ÍNDICE DE LASPEYRES

A fórmula de Laspeyres, também chamada de método ou processo do ano-base, propõe um índice agregativo ponderado em relação as quantidades dos artigos no ano-base.

$$I_L = \frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0}$$

A expressão de Laspeyres também pode ser considerada como média ponderada dos relativos, cujos pesos são representados pelo *valor total* ($v_0 = p_0.q_0$) das mercadorias ou serviços consumidas no período-base.

$$I_L = \frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0} = \frac{\Sigma p_t/p_0}{\Sigma p_0.q_0}.(p_0.q_0) = \Sigma\frac{p_t}{p_0}.\alpha, \text{ onde } \alpha = \frac{p_0.q_0}{\Sigma p_0.q_0}$$

Neste caso α é a participação de cada produto na produção total.

Nesta expressão pode-se observar que se um produto tem seu preço, por exemplo, dobrado em relação a média dos restantes, a quantidade cai pela metade, pois o valor total ($v_0 = p_0.q_0$) permanece constante.

Propriedade do Índice de Laspeyres

(a) O índice de Laspeyres não é reversível, pois:

$$I_L(0,t).I_L(t,0) = \frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_0.q_t}{\Sigma p_t.q_t} \neq 1$$

(b) O índice de Laspeyres não satisfaz o critério da *inversão dos fatores*, isto é, o produto do índice de preços pelo índice de quantidade deve ser igual ao índice de valor. Por índice de valor entende-se a quantidade:

$$I_V = \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0}$$

No caso, se deveria ter:

$$I_L^P.I_L^Q = \frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma q_t.p_0}{\Sigma q_0.p_0} \neq \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0} = I_V$$

(c) O índice de Laspeyres não é transitivo, pois:

$$I_L(0,\ 1).I_L(1,\ 2) = \frac{\Sigma p_1.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_2.q_1}{\Sigma p_1.q_1} \neq \frac{\Sigma p_2.q_0}{\Sigma p_0.q_0} = I_L(0,\ 2)$$

3.5.2. O ÍNDICE DE PAASCHE

A expressão do índice de Paasche, fornece um índice do tipo agregativo de preços, ponderado pelas quantidades consumidas na época atual (t).

$$I_P = \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_t}$$

Da mesma forma que para o índice de Laspeyres, a expressão do índice de Paasche pode ser considerada como uma média ponderada de relativos, cujos pesos são representados pelo produto dos preços no ano base multiplicados pelas quantidades na época "t" ($p_0.q_t$)

$$I_P = \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_t} = \frac{\Sigma p_t/p_0}{\Sigma p_0.q_t}.(p_0.q_t) = \Sigma\frac{p_t}{p_0}.\alpha,\ \text{onde}\ \alpha = \frac{p_0.q_t}{\Sigma p_0.q_t}$$

Propriedade do Índice de Paasche

(a) O índice de Paasche não é reversível, pois:

$$I_P(0,t).I_P(t,0) = \frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t}.\frac{\sum p_0.q_0}{\sum p_t.q_0} \neq 1$$

(b) O índice de Paasche não satisfaz o critério da *inversão dos fatores*, pois:

$$I_P^P.I_P^Q = \frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t}.\frac{\sum q_t.p_t}{\sum q_0.p_t} \neq \frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_0} = I_V$$

(c) O índice de Paasche não é transitivo, pois:

$$I_P(0,\ 1).I_P(1,\ 2) = \frac{\sum p_1.q_1}{\sum p_0.q_1}.\frac{\sum p_2.q_2}{\sum p_1.q_2} \neq \frac{\sum p_2.q_2}{\sum p_0.q_2} = I_P(0,\ 2)$$

3.5.3. Relação entre os índices de Laspeyres e Paasche

Os resultados obtidos aplicando-se os índices de Laspeyres e Paasche a um mesmo conjunto de preços e quantidades são, em geral, diferentes, pois, normalmente, as quantidades da época base e da época atual não são as mesmas. Paasche e Laspeyres forneceriam os mesmos resultados se as quantidades da época "0" e da época "t" fossem proporcionais, isto é, se $q_t / q_0 = k$ (constante), ou seja, $q_t = kq_0$, então se teria:

$$I_P = \frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t} = \frac{\sum p_t.kq_0}{\sum p_0.kq_0} = \frac{\sum p_t.q_0}{\sum p_0.q_0} = I_L$$

Na prática, as quantidades não variam na mesma proporção e a relação entre os índices de Laspeyres e Paasche vai depender da correlação entre estas variações.

3.5.4. O índice de Fischer

Como nem o índice de Laspeyres e nem o de Paasche satisfazem as propriedades da inversão, reversão e circularidade, Irving Fisher propôs a seguinte fórmula:

$$I_F = \sqrt{\frac{\sum p_t.q_0}{\sum p_0.q_0}.\frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_0}} = \sqrt{I_L.I_P}$$, que é a média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche.

Propriedades do índice de Fischer

(a) O índice de Fischer é invisível, pois:

$$I_F(0,\ t).I_F(t,\ 0) = \sqrt{\frac{\sum p_t.q_0}{\sum p_0.q_0}.\frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t}}.\sqrt{\frac{\sum p_0.q_t}{\sum p_t.q_t}.\frac{\sum p_0.q_0}{\sum p_t.q_0}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sum p_t.q_0}{\sum p_0.q_0}.\frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t}.\frac{\sum p_0.q_t}{\sum p_t.q_t}.\frac{\sum p_0.q_0}{\sum p_t.q_0}} = \sqrt{1} = 1$$

(b) O índice de Fischer satisfaz o critério da *reversão dos fatores*, pois:

$$I_F^P(0,\ t).I_F^Q(0,\ t) = \sqrt{\frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_t}}.\sqrt{\frac{\Sigma q_t p_0.}{\Sigma q_0 p_0.}.\frac{\Sigma q_t p_t.}{\Sigma q_0 p_t.}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_t.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_t}.\frac{\Sigma q_t p_0.}{\Sigma q_0 p_0.}.\frac{\Sigma q_t p_t.}{\Sigma q_0 p_t.}} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0}\right)^2} =$$

$$= \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0} = I_V$$

(c) O índice de Fischer não é transitivo, pois:

$$I_F(0,\ 1).I_F(1,\ 2) = \sqrt{\frac{\Sigma p_1.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_1.q_1}{\Sigma p_0.q_1}}\ .\ \sqrt{\frac{\Sigma p_2.q_1}{\Sigma p_1.q_1}.\frac{\Sigma p_2.q_2}{\Sigma p_1.q_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_1.q_1}{\Sigma p_0.q_1}.\frac{\Sigma p_2.q_1}{\Sigma p_1.q_1}.\frac{\Sigma p_2.q_2}{\Sigma p_1.q_2}} \neq \sqrt{\frac{\Sigma p_2.q_0}{\Sigma p_0.q_0}.\frac{\Sigma p_2.q_2}{\Sigma p_0.q_2}} =$$

$$= I_F(0,\ 2)$$

Comprova-se, desta forma, que o índice de Fischer satisfaz as propriedades de Inversão e de Reversão, motivo pelo qual é denominado de fórmula ideal.

3.5.5. O ÍNDICE DE MARSHALL-EDGEWORTH

O índice de Marshall-Edgeworth é um índice do tipo agregativo, onde as ponderações são dadas pela média entre as quantidades da época base e da época atual, ou seja, a ponderação é executada pela quantidade $(q_0 + q_t) / 2$.

$$I_{ME} = \frac{\Sigma p_t.(q_0 + q_t)/2}{\Sigma p_0.(q_0 + q_t)/2} = \frac{\Sigma p_t.(q_0 + q_t)}{\Sigma p_0.(q_0 + q_t)} = \frac{\Sigma p_t.q_0 + \Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0 + \Sigma p_0.q_t}$$

O que mostra que o índice de Marshall-Edgeworth é o quociente entre a soma dos numeradores de Laspeyres e Paasche e a soma dos denominadores destes mesmos índices.

Propriedades do índice de Marshall-Edgeworth

(a) O índice de Marshall-Edgeworth é inversível, pois:

$$I_{ME}(0,\ t).I_{ME}(t,\ 0) = \frac{\Sigma p_t.(q_0 + q_t)}{\Sigma p_0.(q_0 + q_t)}.\frac{\Sigma p_0.(q_0 + q_t)}{\Sigma p_t.(q_0 + q_t)} = 1$$

(b) O índice de Marshall-Edgeworth não satisfaz o critério da reversão dos fatores, pois:

$$I_{ME}^P.I_{ME}^Q = \frac{\Sigma p_t.(q_0 + q_t)}{\Sigma p_0.(q_0 + q_t)}.\frac{\Sigma q_t.(p_0 + p_t)}{\Sigma q_0.(p_0 + p_t)} \neq \frac{\Sigma p_t.q_t}{\Sigma p_0.q_0} = I_V$$

(c) O índice de Marshall-Edgeworth não satisfaz a propriedade circular, pois:

$$I_{ME}(0,\ 1).I_{ME}(1,\ 2) = \frac{\Sigma p_1.(q_0 + q_1)}{\Sigma p_0.(q_0 + q_1)}.\frac{\Sigma p_2.(q_1 + q_2)}{\Sigma p_1.(q_1 + q_2)} \neq$$

$$\neq \frac{\Sigma p_2.(q_0 + q_2)}{\Sigma p_0.(q_0 + q_2)} = I_{ME}(0,\ 2)$$

3.5.6. OUTROS ÍNDICES

(1) Índice de Drobish

Drobish propõe um índice baseado na média aritmética entre os índices de Laspeyres e Paasche.

$$I_D = (I_L + I_P)/2$$

(2) Índice de Yong

Yong propõe um índice baseado em quantidades fixas, que podem ser as da época base (Laspeyres) ou de outra época qualquer.

$$I_Y = \frac{\Sigma p_t.q_c}{\Sigma p_0.q_c}$$

(3) Índice de Keynes

É um índice do tipo agregativo ponderado onde as ponderações são executadas pelas menores quantidades entre q_0 e q_t.

$$I_K = \frac{\Sigma p_t.(\min\{q_0, q_t\})}{\Sigma p_0.(\min\{q_0, q_t\})}.$$

3.5.7. EXEMPLO 3.3

Tabela 15 - Preços das utilidades A, B, C e D - Porto Alegre - 2003

Artigos	Quantidade (kg)		Preço por kg					
	0	t	0	t	p_tq_0	p_0q_0	p_tq_t	p_0q_t
A	2	3	8	10,0	20,0	16	30,0	24
B	3	2	4	4,5	13,5	12	9,0	8
C	1	2	10	8,0	8,0	10	16,0	20
D	4	3	5	5,5	22,0	20	16,5	15
Total					63,5	58	71,5	67

- Índice de Laspeyres

$$I_L = \frac{\sum p_t.q_0}{\sum p_0.q_0} = \frac{63{,}5}{58} = 109{,}48\%$$

- Índice de Paasche

$$I_P = \frac{\sum p_t.q_t}{\sum p_0.q_t} = \frac{71{,}5}{67} = 106{,}72\%$$

- Índice de Fischer

$$I_F(1,\ 2) = \sqrt{I_L.I_P} = \sqrt{1{,}0948.1{,}0672} = 108{,}09\%$$

- Índice de Marshall-Edgeworth

$$I_{ME}(1,\ 2) = \frac{63{,}5 + 71{,}5}{58 + 67} = \frac{135}{125} = 108{,}00\%$$

- Índice de Drobish

$$I_D = \left(I_L + I_P\right)/2 = \frac{1{,}0948 + 1{,}6072}{2} = 108{,}10\%$$

- Índice de Yong

$I_Y = \dfrac{\sum p_t.q_c}{\sum p_0.q_c}$ O valor deste índice dependerá das quantidades escolhidas como base. Ele poderá ser igual ao de Laspeyres, Paasche, Marshall-Edgeworth, etc.

- Índice de Keynes

$$I_K = \frac{2.10 + 2.4{,}5 + 1.8 + 3.5{,}5}{2.8 + 2.4 + 1.10 + 3.5} = \frac{20 + 9 + 8 + 16{,}5}{16 + 8 + 10 + 15} = \frac{53{,}5}{49} = 109{,}18\%$$

3.6. SÉRIES DE ÍNDICES - BASE MÓVEL E BASE FIXA

Uma série de números índices, da mesma forma que os relativos, poderá ser construída de duas maneiras: base móvel e base fixa.

3.6.1. BASE FIXA

Neste caso escolhe-se um período determinado (normalmente uma média de dois ou três períodos) e toda a série é construída tendo como comparação este período fixado. Assim se o período fixado for o “0” a série de índices será:

I(0, 1), I(0, 2), I(0, 3), ..., I(0, n)

Qualquer comparação para ser válida só poderá ser feita com o período base, a menos que o índice utilizado tenha as propriedades de inversão e circularidade.

3.6.2. BASE MÓVEL

Neste caso a base é alterada de período para período, isto é, a base é sempre o período anterior. Assim se os períodos considerados forem de 0, ..., n, a série de índices será:

I(0, 1), I(1, 2), I(2, 3), ..., I(n-1, n)

A comparação somente poderá ser efetuada com o período imediatamente anterior. Qualquer outro tipo de comparação exigiria a construção de um índice encadeado.

I(0, 1) = I(0, 1)

I(0, 2) = I(0, 1) . I(1, 2)

....

I(0, n) = I(0, 1) . I(1, 2) .... I(n-1, n)

Os índices obtidos desta forma somente serão iguais aos obtidos através de uma base fixa, quando a fórmula do índice tiver a propriedade circular, que é o caso dos índices geométrico e aritmético de ponderação fixa.

3.6.3. MUDANÇA DE BASE NA PRÁTICA

Na prática a mudança de base para números índices é executada da mesma forma que para relativos, ou seja, através de uma simples proporção. Este critério será válido se o índice sendo utilizado for circular, o que não acontece em geral. No entanto, os resultados, na maioria das situações, são satisfatórios.

3.7. APLICAÇÕES DOS NÚMEROS ÍNDICES

Os números índices são importantes para assinalar a velocidade com os preços mudam e desta forma para indicar as taxas de inflação, desemprego, exportação, etc. No entanto, as duas principais aplicações dos números índices são a *deflação* e a *correção monetária.*

3.7.1. DEFLAÇÃO

Em Estatística, entende-se por deflação o processo que visa corrigir a perda do poder aquisitivo da moeda, ocasionado pela elevação dos preços dos bens ou serviços.

Já foi visto como acompanhar a alteração dos preços ou quantidades através de um conjunto de fórmulas. Assim, escolhendo-se uma fórmula como *Índice Geral de Preços (IGP)*, pode-se definir o valor real da moeda (VR) como sendo o quociente:

VR = 1 / IGP

Da mesma forma, pode-se agir com relação a vendas, salários, etc. Assim por exemplo, tomando-se como referência um *Índice de Preços ao Consumidor (IGP)*, as vendas reais (VR) seriam:

Vendas reais = Vendas Nominais / IGP ou VR = VN / IGP

Para os salários ter-se-ia: Salário real = Salário nominal / IPC

Exemplo 3.4:

Tabela 16 - Salário nominal, IPC e salário real no período 1999/2003

Anos	Salário Nominal	IPC	Salário Real
00	140	100	140,00
01	200	130	153,84
02	300	270	111,11
03	380	400	95,00
04	420	500	84,00

Embora o salário nominal tenha aumentado de 140 para 400 (200%), o salário real decresceu de 140 para 2004 (40%), isto é, o salário de 2003 é apenas 60% do salário de 1999.

A operação de divisão que leva aos valores *nominais* ou *correntes* aos valores *reais* ou *constantes* é denominada de *deflação* e o índice de preços utilizado de *deflator*. Os valores não deflacionados (nominais) não são comparáveis, pois são expressos em unidades monetárias de valores diferentes, já que a inflação faz variar o valor real da moeda. Os valores deflacionados são expressos em valores monetários de uma mesma época (base do índice) e são, portanto, comparáveis.

3.7.2. CORREÇÃO MONETÁRIA

A correção monetária (CM) é a operação oposta à deflação, pois ao invés de expressar os valores em relação ao valor da moeda da época base do índice utilizado como deflator ela traz os valores para a época atual, ou seja, é feita a atualização dos valores através de um *coeficiente de correção monetária (CCM)*.

Em resumo, a deflação torna comparáveis os valores em relação a uma *época passada* (base do índice utilizado), enquanto que a correção monetária, torna homogêneos os valores em relação a época presente (a correção monetária inflaciona os valores).

O coeficiente de correção monetária para o período t_1 é obtido através da relação:

CCM = Índice do período “t” / Índice do período “t_1”, para t_1 = 0, 1, 2, ..., t.

Exemplo 3.5:

Tabela 17 - Índice da construção imobiliária e CCM

Anos	Índices (Base = 95/97)	CCM	Cálculos
98	245	3,76	920/245
99	282	3,26	920/282
00	331	2,78	920/331
01	394	2,34	920/394
02	510	1,80	920/510
03	638	1,44	920/638
04	920	1,00	920/920

Assim, por exemplo, um apto. que foi construído em 1996 por 147 000 u.m. valeria em 2000: 2,78.147 000 u.m.= 408 660 u.m.

4. EXERCÍCIOS

1.1. Um produto sofre um aumento 3% em janeiro e mais 7% em fevereiro. Qual é o valor do aumento acumulado?

1.2. Um produto entra em oferta com uma baixa de 5% sobre o preço original patrocinada pelo fabricante, mas em função dos concorrentes o supermercadista oferece um desconto adicional, sobre o preço rebaixado, de 4%. Qual o valor total da baixa?

1.3. Um artigo sofreu um aumento de 25% numa determinada época. Depois de um certo tempo como não estivesse vendendo bem os fabricantes resolveram dar um desconto de 20%. Qual a variação total no preço do produto?

1.4. Se os salários aumentam 20% e o Índice do Custo de Vida 10% num mesmo período. Qual é o aumento real de salário?

1.5 A inflação acumulada num certo período foi de 25%. Os salários foram aumentados em 20%. Qual a perda real do poder aquisitivo no período?

2.1. A indústria de camisas "GOLA S.A.“ faturou no mês anterior cerca de R$140 000,00 tendo vendido cada unidade, em média, por R$ 14,00. Neste mês ela deseja aumentar o faturamento em R$28 000, sem, no entanto, aumentar o preço médio unitário. Qual deve ser o aumento médio na quantidade produzida?

2.2. Os relativos de preço (base fixa em 2000) de certo artigo no período 2000/04, estão na tabela abaixo:

Anos	**00**	**01**	**02**	**03**	**94**
Relativos	100	120	130	150	160

Sabendo que em 2002 este artigo custava 249,60 u.m., calcular os preços nos demais períodos.

2.3. A quantidade relativa de certo produto no ano de 04 tomada com base em 02 é de 115. A de 02 tomada em relação a base de 00 é de 140. Determinar a quantidade relativa de 04 com base em 00.

2.4. Uma empresa pretende aumentar a quantidade de suas vendas em 60%. Qual deve ser o aumento percentual no preço de seus produtos para que o faturamento duplique?

2.5. Os preços de um artigo tiveram o comportamento da tabela abaixo no período 99/04.

Anos	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**94**
Preços	25	40	50	60	75	90

(i) Determine os relativos de preço com base fixa em 2001.

(ii) Determine os relativos de preço com base móvel.

2.6. Abaixo estão os relativos de base fixa da produção de um determinado artigo.

(i) Determine os relativos de base móvel para este artigo.

(ii) Determine a produção de cada ano sabendo que, no ano base, ela foi de 300 toneladas.

Anos	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**
Relativos	40	50	100	135	162

2.7. Os relativos de base móvel da produção anual de um bem são:

Anos	**98**	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**04**
Relativos	—	120,0	111,1	105,0	104,8	109,1	104,2

Determine:

(i) Os relativos de produção com base fixa em 2000.

(ii) A produção de cada ano sabendo que em 2000 ela foi de 500 toneladas.

(iii) Mediante a mudança de base operada em (i), determine os relativos de base fixa 2002.

2.8. Abaixo são encontrados os relativos de base fixa correspondentes aos preços de uma determinada utilidade.

(i) Determine os relativos de base móvel.

(ii) Efetue uma mudança de base para o ano de 2002.

Anos	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**04**
Relativos	100	110	115	117	126	132

2.9. Abaixo são encontrados os relativos em cadeia das quantidades produzidas de um determinado artigo.

Anos	**00**	**01**	**02**	**03**	**04**
Relativos	—	130	150	125	160

(i) Determine os relativos de base fixa em 2001.

(ii) Interprete o relativo de base móvel em 2002.

(iii) Interprete o relativo de base fixa de 2003 que foi calculado em (i).

(iv) Sabendo que em 2001 foram produzidas 5 milhões de toneladas do artigo em questão, determine o número de toneladas produzidas no ano de 2004.

2.10. Considere 3 épocas “0”, “1” e “2”. Na época “0” o preço de um artigo era 25% menor do que o preço na época “1” e na época “2” o preço deste mesmo artigo é 20% maior do que na época “1”. Qual é o aumento do preço na época “2” tendo como base a época “0”.

3.1. A tabela abaixo registra os preços e as quantidades consumidas de um conjunto de três artigos. Utilizando 03 como base, determine para 04:

(i). O índice de preços do conjunto segundo Laspeyres.

(ii). O índice de preços do conjunto segundo Paasche.

(iii). O índice de preços do conjunto segundo Fischer.

Artigo	Unidade	Preço		Quantidade	
		03	04	03	04
Leite	Litro	0,40	0,55	25	20
Pão	Quilo	1,20	1,85	15	16
Ovos	Dúzia	0,60	1,20	8	6

3.2. Determine a variação dos preços para o conjunto de bens abaixo de acordo com o critério de Marshall-Edgeworth.

Artigo	Unidade	Preço		Quantidade	
		03	04	03	04
Carne	Quilo	2,45	3,50	33	30
Leite	Litro	0,40	0,55	20	22
Massa	Quilo	1,50	2,80	10	10

3.3. Considerando os valores da tabela 3.1, determine os mesmos índices só que para quantidades.

3.4. Considerando os valores da tabela 3.2, determine: **(i)** A variação dos preços de acordo com o critério de Laspeyres tomando como base 2003. **(ii)** Após mude a base para 2004 e determine o mesmo índice. **(iii)** Verifique ainda que o índice não satisfaz o *critério da reversibilidade*.

3.5. Considerando os valores da tabela do exercício 3.2, verifique que a fórmula de Paasche não satisfaz o critério da *reversão dos fatores*.

3.6. Considerando a tabela abaixo, verifique que o índice de preços de Laspeyres, não satisfaz ao critério circular.

Artigo	Unidade	Preço por unidade			Quantidade consumida		
		02	03	04	02	03	04
Carne	Quilo	2,45	3,50	4,15	30	33	30
Leite	Litro	0,40	0,55	0,60	22	20	25
Massa	Quilo	1,50	2,80	3,25	10	10	12

5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1.1. O aumento acumulado será: 1,03.1,07 = 1,1021 ou 10,21%

1.2. A baixa acumulada será: 0,95.0,96 = 0,912; 1 - 0,912 = 0,088. A baixa é de 8,80%

1.3. A variação total será: 1,25.0,80 = 1 ou **Zero** por cento.

1.4. É um caso de divisão de taxas. Temos 1,20 / 1,10 = 1,0909. ou aumento de 9,09%.

1.5. É um caso de divisão de taxas: Tem-se: 1,20 / 1,25 = 0,96 ou perda de 4%

2.1 Tem-se que: $v_0 = p_0.q_0 \Rightarrow 140\ 000 = 14.q_0$

$v_1 = p_1.q_1 \Rightarrow (140\ 000 + 28\ 000) = 14.q_1$, então:

$v_1 / v_0 = p_1.q_1 / p_0.q_0 \Rightarrow 14q_1 / 14q_0 = 168\ 000 / 140\ 000 \Rightarrow q_1 / q_0 = 1,20$ ou 20%

2.2.

Anos	00	01	02	03	04
Relativos	192,00	230,40	249,60	288,00	307,20

2.3. Tem-se q(02, 04) =1,15 e q(00, 02) = 1,40. Aplicando a propriedade circular vem:

q(00, 04) = q(00, 02).q(02, 04) = 1,40 1,15 = 1,61 0u 161%

2.4. Tem-se que $v_1 = p_1.q_1$ e $v_0 = p_0.q_0$ e que $q_1 = 1,60.q_0$ e $v_1 = 2v_0$. Então $v_1 / v_0 = p_1.q_1 / p_0.q_0 \Rightarrow 2v_0 / v_0 = 1,60q_0.p_1./\ p_0.q_0 \Rightarrow 2 = 1,60p_1./\ p_0. \Rightarrow p_1./\ p_0 = 2/1,60 = 1,25$, ou seja, os preços devem ser aumentados em 25%.

2.5.

Anos	99	00	01	02	03	04
(i)	50	80	100	120	150	180
(ii)	----	160	125	120	125	120

2.6.

Anos	00	01	02	03	04
(i)	—	125	200	135	120
(ii)	120	150	300	405	486

2.7.

Anos	98	99	00	01	02	03	04
(i)	75,00	90,00	100,00	105,00	110,04	120,05	125,10
(ii)	375,04	450,05	500,00	525,00	550,20	600,27	625,48
(iii)	68,16	81,79	90,89	95,42	100,00	109,10	113,69

2.8.

Anos	99	00	01	02	03	04
(i)	----	110,00	104,55	101,74	107,69	104,76
(ii)	85,47	94,02	98,29	100,00	107,69	112,82

2.9.

Anos	00	01	02	03	04
(i)	76,92	100,00	150,00	187,50	300,00

(ii) Em 2002 foram produzidos 50% a mais do artigo do que em 2001.

(iii) Em 2003 foram produzidos 87,50% a mais do artigo do que em 2001.

(iv) q_{94} = 3.5 000 000 = 15 000 000

2.10. p(0, 2) = 1,20 / 0,75 = 1,60 ou 60%

3.1. (i) 155,79% **(ii)** 155,19% **(iii)** 155,49%

3.2. 148,73%

3.3. (i) 93,90% **(ii)** 93,54% **(iii)** 93,72%

3.4. (i) 148,77% **(ii)** 67,06%

(iii) Não é reversível, pois: 1,4877.0,6706 = 0,9566 e não “um” como deveria ser.

3.5. Índice de preços de Paasche = 149,13%

Índice de quantidade de Paasche = 93,92%

Índice de valor = 139,72%

Como 1,4913.0,9392 = 140,06% ≠ 139,72% isto mostra que o índice não satisfaz a propriedade.

3.6. $I_L(02, 03)$ = 149,13%

$I_L(03, 04)$ = 117,44%

$I_L(02, 04)$ = 174,92%

Como $I_L(02, 03).I_L(03, 04)$ = 1,4913.1,1744 = 175,14% ≠ $I_L(02, 04)$ = 174,92%, isto mostra que o índice não é reversível.

6. REFERÊNCIAS

ALLEN, R. G. D. *Estatística para economistas*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1979.

ALMODOVA, José. *Ensaio de Estatística Econômica*. São Paulo, 1979.

CASTRO, Lauro Sodré Viveiros de. *Pontos de Estatística*. Rio de Janeiro: Livraria e Editora Científica, 1960.

COSTA, J. J. da Serra Costa. *Elementos de Estatística*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1977.

FISHER, Franklin M., SHELL, Karl. *The Economic Theory of Price Indices*. New York: Academic Press, 1972.

FISHER, Irwing. *The Making of Index Numbers*. New York: Augustus M. Kelley Publishers, 1967.

FONSECA, Jairo Sinom da et all. *Estatística Aplicada*. São Paulo: Editora Atlas, 1976.

FOX, Karl. *Manual de Econometria*. Buenos Aires: Centro de Ayuda Técnica (Agência para el Desarrollo International - AID), 1973.

IORIO, Oswaldo. Estatística Econômica: Número Índices. *Revista Brasileira de Estatística*. Rio de Janeiro, v. 26, n. 101/102, p. 25-33, jan/jun 1965.

LÉVY, Michel Louis. *Introdução à Estatística*. São Paulo: Publicações Europa-América - Coleção Saber, 1979.

MELO, Francisco de Assis Moura. Padrão de Vida, Custo de Vida e Índice de Preços ao Consumidor. *Revista Brasileira de Estatística*. Rio de Janeiro, v. 37, n. 138, p. 445-56, out/dez 1976.

MOREIRA, Délio. *Métodos estatísticos para economistas e administradores*. São Paulo, Edições Loyola, 1975.

ROCHA, Marcos da. *Curso de Estatística*. Rio de Janeiro, IBGE, 1969.

ROSSETI, José Paschoal. *Introdução à Economia*. São Paulo, Editora Atlas, 1982.

SOUZA, Jorge de. *Estatística Econômica e Social*. Rio de Janeiro, Editora Campus, 1977.

WONNACOT, Thomas h., WONNACOTT, Ronald J. *Estatística aplicada à Economia e à Administração*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1981.

YA-LUN CHOU, Ya-Lun. *Statistical Analysis with Businnes and Economic Applications*. New York, Holt Renehart and Wiston inc., 1969.