Índices

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Motivação

Na prática, não existe muito interesse na comparação de preços e quantidades de um único artigo, como é o caso dos relativos, mas sim na comparação de conjuntos de preços de artigos entre diferentes pontos no tempo.

Por exemplo, para se ter uma idéia do custo de vida não é suficiente saber a variação do preço da carne, mas é necessário também o do arroz, do leite, da batata, etc. É claro que todos estes preços poderiam ser fornecidos em formas de tabelas. Mas esta solução seria bastante falha em termos informativos.

O que se quer é um único número que represente a variação de preços de todo um conjunto de bens e serviços, bem como as quantidades consumidas ou utilizadas. Um número com estas características é denominado de número índice.

A escolha da expressão matemática do índice, isto é, da fórmula depende, em parte, dos objetivos do índice, mas é desejável do ponto de vista teórico, que os números índices satisfaçam as mesmas propriedades dos relativos.

Nenhum índice proposto, até hoje, satisfaz a todas as propriedades. Por isso, na prática, a fórmula adotada, depende mais das "facilidades" que ela proporciona (em termos de cálculo) do que das propriedades matemáticas que ela satisfaz.

Notação

- p_0 = preço do artigo na época base -"0".
- q_0 = quantidade do na época base - "0".
- p_t = preço do artigo na época "t".
- q_t = quantidade do artigo na época "t".

Observação:

As notações foram simplificadas, pois, por exemplo, na época "t" onde se escreve p_0 *se deveria escrever* p_0^i, *isto é, preço do artigo "i" na época base com i = 1, 2, ... , n. Mas é comum se eliminar certos sub-índices, bem como, os indicativos dos somatórios de forma a tornar a representação menos confusa.*

Índices (de Preços) Simples

Os índices simples são caracterizados por envolverem apenas os preços e não as quantidades consumidas de cada produto levado em consideração.

Índice Aritmético

É a média aritmética dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_{\mathcal{A}} = \frac{1}{n}\sum p(0,t) = \frac{1}{n}\sum (p_t / p_0)$$

É um índice fácil de ser calculado, mas que apresenta a desvantagem da média aritmética, que é a de sofrer a influência de valores extremos, isto é, grandes variações nos preços de um único produto. É um índice que não é *reversível* *e nem transitivo.*

Índice Geométrico

É a média geométrica dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_G = \sqrt[n]{\prod p(0,t)} = \sqrt[n]{\prod (p_t / p_0)}$$

O índice geométrico simples costuma também ser definido através da média aritmética dos logaritmos dos relativos, i.é, o índice geométrico é um índice aritmético, só que dos logaritmos dos relativos ao invés dos relativos. Este índice é reversível e transitivo

Índice Harmônico

É a média harmônica dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum (p_0 / p_t)} = \frac{n}{\sum (p_0 / p_t)} = \frac{n}{\sum p(t,0)}$$

O índice harmônico da mesma forma que o aritmético não é reversível e nem transitivo.

Índice Mediano

É a mediana dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_{\mathcal{M}} = me\{p_t/p_0\} = me\{p(0, t)\}$$

A vantagem deste índice é a de não ser influenciado por variações extremas de preços de um único produto. Uma desvantagem é que é necessário ordenar os relativos para obtê-lo. Este índice não é reversível e nem transitivo.

Índice Agregativo Simples ou de Bradstreet

É o mais antigo dos números índices e é obtido pela proporção entre a variação na época atual e a época base.

$$I_{AG} = \frac{\sum p_t}{\sum p_0}$$

É um índice que é reversível e transitivo.

Exemplo

	Preços		
Produtos	1	2	3
Batata	1,38	1,19	1,27
Couve-flor	2,21	2,23	2,30
Pimentão	2,30	2,24	2,20
Cebola	1,26	1,19	1,15
Alface	0,57	0,57	0,60

Calcular os diversos índices de preços do período 2 com base no período 1, do período 3 com base no período 2 e do período 3 com base no período 1. Verificar se os índices são transitivos e reversíveis.

Índices de Preços Ponderados

A principal desvantagem dos índices anteriores é a de considerar todos os artigos com a mesma importância. Para que o índice se torne mais realista, uma vez que se sabe que os produtos não consumidos em igual quantidade, é necessário ponderar cada artigo.

Essa ponderação, normalmente, é realizada pelas quantidades consumidas, obtidas através de uma amostragem probabilística. Estas quantidades podem ser utilizadas de forma absoluta ou então, como é mais comum, pela sua importância relativa no conjunto de quantidades.

Assim se "q_i" é a quantidade consumida, produzida, vendida, etc. de determinado artigo, pode-se utilizar no índice, o valor absoluto "q_i" ou então seu valor relativo $\alpha_i = q_i \,/\, \Sigma q_i$, de tal modo que, $\Sigma\,\alpha_i = 1 = 100\%$.

Na prática o que é utilizado é uma ponderação através do valor total gasto (na época base ou atual) Assim se "q" é a quantidade consumida,, e p_0 é o preço na época base, então:

$$\alpha = \frac{p_0 q}{\sum p_0 q}$$

Esta opção é a preferida pois dá condições de verificar a contribuição do artigo cuja ponderação é "α_i" na variação final do índice.

Sejam "α" as ponderações associadas aos artigos cujos preços são p_0 e p_t nas épocas "0" e "t" respectivamente. Então os índices anteriores ficam:

Índice Aritmético Ponderado

É a média aritmética dos relativos, de cada produto, ponderados pelas quantidades α_i.

$$I_{\mathcal{AP}} = \frac{1}{n}\sum p(0,t)\alpha = \frac{1}{n}\sum \frac{p_t}{p_0}\alpha$$

Índice Geométrico Ponderado

É a média geométrica ponderada dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_{GP} = \sqrt[\sum\alpha]{\prod p(0,t)^{\alpha}} = \prod p(0,t)^{\alpha}$$

Uma vez que a soma das ponderações é igual a um.

Índice Harmônico Ponderado

É a média harmônica ponderada dos relativos, de cada produto, calculados em relação à época base.

$$I_{\mathcal{HP}} = \frac{1}{\frac{1}{\sum \alpha} \sum (p_0 / p_t)} = \frac{\sum \alpha}{\sum \alpha.(p_0 / p_t)} = \frac{\sum \alpha}{\sum \alpha.p(t,0)}$$

Índice Agregativo Ponderado

É o quociente entre o produto das quantidades pelos preços da época atual e o produto das quantidades pelos preços da época base.

$$I_{AGP} = \frac{\sum \alpha . p_t}{\sum \alpha . p_0}$$

Exemplo

	Preços		Quantidades
Produtos	p_0	p_t	q
Batata	1,38	1,19	2
Couve-flor	2,21	2,23	4
Pimentão	2,30	2,24	3
Cebola	1,26	1,19	5
Alface	0,57	0,57	12

Calcular os diversos índices ponderados de preços para a cesta de produtos da tabela anterior.

Índices Especiais

São índices do tipo agregativo onde as ponderações são executadas pelas quantidades da época base ou da época atual, ou ainda de outras formas. Esses índices são conhecidos, normalmente, pelos nomes dos seus formuladores.

Índice de Laspeyres

A fórmula de Laspeyres, também chamada de método ou processo do ano-base, propõe um índice agregativo ponderado em relação as quantidades dos artigos no ano-base.

$$I_L = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}$$

A expressão de Laspeyres também pode ser considerada como média ponderada dos relativos, cujos pesos são representados pelo valor total ($v_0 = p_0.q_0$) das mercadorias ou serviços consumidas no período-base.

$$I_L = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} = \frac{\sum p_t / p_0}{\sum p_0 \cdot q_0} . (p_0 \cdot q_0) = \sum \frac{p_t}{p_0} . \alpha$$

$$\text{Onde } \alpha = \frac{p_0 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}$$

Neste caso α é a participação de cada produto na produção total.

Nesta expressão pode-se observar que se um produto tem seu preço, por exemplo, dobrado em relação a média dos restantes, a quantidade cai pela metade, pois o valor total $(v_0 = p_0.q_0)$ *permanece constante.*

Propriedades do Índice de Laspeyres

(a) O índice de Laspeyres não é reversível, pois:

$$I_L(0,t).I_L(t,0) = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} \cdot \frac{\sum p_0 \cdot q_t}{\sum p_t \cdot q_t} \neq 1$$

(b) *O índice de Laspeyres* **não** *satisfaz o critério da* *inversão dos fatores*, *isto é, o produto do índice de preços pelo índice de quantidade deve ser igual ao índice de valor. Por índice de valor entende-se a quantidade:*

$$I_V = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0}$$

O índice de quantidade é obtido através da troca de p e q na fórmula do índice de preços. Neste caso, seria:

$$I_{\mathcal{L}}^{Q} = \frac{\sum q_t \cdot p_0}{\sum q_0 \cdot p_0}$$

Mas:

$$I_{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}} \cdot I_{\mathcal{L}}^{Q} = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} \cdot \frac{\sum q_t \cdot p_0}{\sum q_0 \cdot p_0} \neq \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0} = I_{\mathcal{V}}$$

(c) O índice de Laspeyres não é transitivo, pois:

$$I_{\mathcal{L}}(0,1).I_{\mathcal{L}}(1,2)=\frac{\sum p_1 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} \cdot \frac{\sum p_2 \cdot q_1}{\sum p_1 \cdot q_1} \neq \frac{\sum p_2 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} = I_{\mathcal{L}}(0,2)$$

Índice de Paasche

A expressão do índice de Paasche, fornece um índice do tipo agregativo de preços, ponderado pelas quantidades consumidas na época atual (t).

$$I_{\mathcal{P}} = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t}$$

Da mesma forma que Laspeyres, a expressão do índice de Paasche pode ser considerada como uma média ponderada de relativos, cujos pesos são representados pelo produto dos preços no ano base multiplicados pelas quantidades na época "t" ($p_0.q_t$)

$$I_{\mathcal{P}} = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t} = \frac{\sum p_t / p_0}{\sum p_0 \cdot q_t} \cdot (p_0 \cdot q_t) = \sum \frac{p_t}{p_0} . \alpha$$

$$Onde\ \alpha = \frac{p_0 \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t}$$

Propriedades do Índice de Paasche

(a) O índice de Paasche não é reversível, pois:

$$I_{\mathcal{P}}(0,t).I_{\mathcal{P}}(t,0)=\frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t}.\frac{\sum p_0 \cdot q_0}{\sum p_t \cdot q_0} \neq 1$$

(b) O índice de Paasche **não** *satisfaz o critério da inversão dos fatores, pois:*

$$I_P^P \cdot I_P^Q = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t} \cdot \frac{\sum q_t \cdot p_t}{\sum q_0 \cdot p_t} \neq \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0} = I_V$$

(c) O índice de Paasche não é transitivo, pois:

$$I_{\mathcal{P}}(0,1).I_{\mathcal{P}}(1,2)=\frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1}.\frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_1 \cdot q_2}\neq\frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_0 \cdot q_2}=I_{\mathcal{P}}(0,2)$$

Relação entre os dois índices

Os resultados obtidos aplicando-se os índices de Laspeyres e Paasche a um mesmo conjunto de preços e quantidades são, em geral, diferentes, pois, normalmente, as quantidades da época base e da época atual não são as mesmas.

Paasche e Laspeyres forneceriam os mesmos resultados se as quantidades da época "0" e da época "t" fossem proporcionais, isto é, se $q_t / q_0 = k$ (constante), ou seja, $q_t = kq_0$, então se teria:

$$I_P = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t} = \frac{\sum p_t \cdot k q_0}{\sum p_0 \cdot k q_0} = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} = I_L$$

Na prática, as quantidades não variam na mesma proporção e a relação entre os índices de Laspeyres e Paasche vai depender da correlação entre estas variações.

Índice de Fisher

Como nem o índice de Laspeyres e nem o de Paasche satisfazem as propriedades da inversão, reversão e circularidade, Irving Fisher propôs a seguinte fórmula:

$$I_{\mathcal{F}} = \sqrt{\frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0} \cdot \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t}} = \sqrt{I_{\mathcal{L}} \cdot I_{\mathcal{P}}}$$

Propriedades do Índice de Fisher

(a) O índice de Fisher é reversível, pois:

$$I_{\mathcal{F}}(0,t).I_{\mathcal{F}}(t,0)=\sqrt{\frac{\sum p_t\cdot q_0}{\sum p_0\cdot q_0}\cdot\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_t}}\cdot\sqrt{\frac{\sum p_0\cdot q_t}{\sum p_t\cdot q_t}\cdot\frac{\sum p_0\cdot q_0}{\sum p_t\cdot q_0}}=$$

$$\sqrt{\frac{\sum p_t\cdot q_0}{\sum p_0\cdot q_0}\cdot\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_t}\cdot\frac{\sum p_0\cdot q_t}{\sum p_t\cdot q_t}\cdot\frac{\sum p_0\cdot q_0}{\sum p_t\cdot q_0}}=\sqrt{1}=1$$

(b) O índice de Fisher satisfaz o critério da inversão dos fatores, pois:

$$I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{P}}(0,t).I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{Q}}(0,t)=\sqrt{\frac{\sum p_t\cdot q_0}{\sum p_0\cdot q_0}.\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_t}}.\sqrt{\frac{\sum q_t p_0\cdot}{\sum q_0 p_0\cdot}.\frac{\sum q_t p_t\cdot}{\sum q_0 p_t\cdot}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sum p_t\cdot q_0}{\sum p_0\cdot q_0}.\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_t}.\frac{\sum q_t p_0\cdot}{\sum q_0 p_0\cdot}.\frac{\sum q_t p_t\cdot}{\sum q_0 p_t\cdot}}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_0}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_0}=I_{\mathcal{V}}$$

(c) O índice de Fisher não é transitivo, pois:

$$I_{\mathcal{F}}(0,1).I_{\mathcal{F}}(1,2)=\sqrt{\frac{\sum p_1 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}.\frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum p_2 \cdot q_1}{\sum p_1 \cdot q_1}.\frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_1 \cdot q_2}} =$$

$$=\sqrt{\frac{\sum p_1 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}.\frac{\sum p_1 \cdot q_1}{\sum p_0 \cdot q_1}.\frac{\sum p_2 \cdot q_1}{\sum p_1 \cdot q_1}.\frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_1 \cdot q_2}} \neq \sqrt{\frac{\sum p_2 \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}.\frac{\sum p_2 \cdot q_2}{\sum p_0 \cdot q_2}} =$$

$$=I_{\mathcal{F}}(0,2)$$

Índice de Marshall-Edgeworth

O índice de Marshall-Edgeworth é um índice do tipo agregativo, onde as ponderações são dadas pela média entre as quantidades da época base e da época atual, ou seja, a ponderação é executada pela quantidade $(q_0 + q_t)/2$.

$$I_{ME}=\frac{\sum p_t\cdot(q_0+q_t)/2}{\sum p_0\cdot(q_0+q_t)/2}=\frac{\sum p_t\cdot(q_0+q_t)}{\sum p_0\cdot(q_0+q_t)}=\frac{\sum p_t\cdot q_0+\sum p_t\cdot q_t}{\sum p_0\cdot q_0+\sum p_0\cdot q_t}$$

O que mostra que o índice de Marshall-Edgeworth é o quociente entre a soma dos numeradores de Laspeyres e Paasche e a soma dos denominadores destes mesmos índices.

Propriedades do Índice de ME

(a) O índice de Marshall-Edgeworth é reversível, pois:

$$I_{ME}(0,t).I_{ME}(t,0) = \frac{\sum p_t.(q_0 + q_t)}{\sum p_0.(q_0 + q_t)}.\frac{\sum p_0.(q_0 + q_t)}{\sum p_t.(q_0 + q_t)} = 1$$

(b) *O índice de Marshall-Edgeworth* ***não*** *satisfaz o critério da **inversão dos fatores**, pois:*

$$I_{ME}^{P} \cdot I_{ME}^{Q} = \frac{\sum p_t \cdot (q_0 + q_t)}{\sum p_0 \cdot (q_0 + q_t)} \cdot \frac{\sum q_t \cdot (p_0 + p_t)}{\sum q_0 \cdot (p_0 + p_t)} \neq \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0} = I_V$$

(c) O índice de Marshall-Edgeworth não é transitivo, pois:

$$I_{ME}(0,1).I_{ME}(1,2)=\frac{\sum p_1.(q_0+q_1)}{\sum p_0.(q_0+q_1)}.\frac{\sum p_2.(q_1+q_2)}{\sum p_1.(q_1+q_2)}\neq$$

$$\neq\frac{\sum p_2.(q_0+q_2)}{\sum p_0.(q_0+q_2)}=I_{ME}(0,2)$$

Exemplo

	Preços		Quantidades	
Produtos	p_0	p_t	q_0	q_t
Batata	1,38	1,19	3	4
Couve-flor	2,21	2,23	5	4
Pimentão	2,30	2,24	2	3
Cebola	1,26	1,19	4	5
Alface	0,57	0,57	12	12

Calcular os diversos índices especiais de preços para a cesta de produtos da tabela anterior.

Séries de Índices

Uma série de números índices, da mesma forma que os relativos, poderá ser construída de duas maneiras: base móvel e base fixa.

Base Fixa

Neste caso escolhe-se um período determinado (normalmente uma média de dois ou três períodos) e toda a série é construída tendo como comparação este período fixado. Assim se o período fixado for o "0" a série de índices será:

$$I(0, 1), I(0, 2), I(0, 3), \ldots., I(0, n)$$

Qualquer comparação para ser válida só poderá ser feita com o período base, a menos que o índice utilizado tenha as propriedades de inversão e circularidade.

Base Móvel

Neste caso a base é alterada de período para período, isto é, a base é sempre o período anterior. Assim se os períodos considerados forem de 0, ..., n, a série de índices será:

$$I(0, 1), I(1, 2), I(2, 3), \ldots, I(n-1, n)$$

A comparação somente poderá ser efetuada com o período imediatamente anterior. Qualquer outro tipo de comparação exigiria a construção de um índice encadeado.

$$I(0, 1) = I(0, 1)$$

$$I(0, 2) = I(0, 1) . I(1, 2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I(0, n) = I(0, 1) . I(1, 2) \ldots . I(n\text{-}1, n)$$

Os índices obtidos desta forma somente serão iguais aos obtidos através de uma base fixa, quando a fórmula do índice tiver a propriedade circular, que é o caso dos índices geométrico e aritmético de ponderação fixa.

Mudança de Base na Prática

Na prática a mudança de base para números índices é executada da mesma forma que para relativos, ou seja, através de uma simples proporção. Este critério será válido se o índice sendo utilizado for circular, o que não acontece em geral. No entanto, os resultados, na maioria das situações, são satisfatórios.

Aplicações dos Números Índices

Os números índices são importantes para assinalar a velocidade com os preços mudam e desta forma para indicar as taxas de inflação, desemprego, exportação, etc. No entanto, as duas principais aplicações dos números índices são a deflação e a correção monetária.

Deflação

Em Estatística, entende-se por deflação o processo que visa corrigir a perda do poder aquisitivo da moeda, ocasionado pela elevação dos preços dos bens ou serviços.

Deflação

Já foi visto como acompanhar a alteração dos preços ou quantidades através de um conjunto de fórmulas. Assim, escolhendo-se uma dessas fórmulas como Índice Geral de Preços (IGP), pode-se definir o valor real da moeda (VR) como sendo o quociente:

$$VR = 1 / IGP$$

Da mesma forma, pode-se agir com relação a vendas, salários, etc. Tomando-se como referência um Índice de Preços ao Consumidor (IGP), as vendas reais (VR) seriam:

Vendas reais = Vendas Nominais / IGP

ou VR = VN / IGP

Para o caso dos salários ter-se-ia:

Salário real = Salário nominal / IPC

A operação de divisão que leva os valores nominais ou correntes aos valores reais ou constantes é denominada de deflação. O índice utilizado é denominado de deflator.

Os valores não deflacionados (nominais) não são comparáveis, pois são expressos em unidades monetárias de valores diferentes, já que a inflação faz variar o valor real da moeda. Os valores deflacionados são expressos em valores monetários de uma mesma época (base do índice) e são, portanto, comparáveis.

Correção Monetária

A correção monetária (CM) é a operação oposta à deflação, pois ao invés de expressar os valores em relação ao valor da moeda da época base do índice utilizado como deflator ela traz os valores para a época atual, ou seja, é feita a atualização dos valores através de um coeficiente de correção monetária (CCM).

Em resumo, a deflação torna comparáveis os valores em relação a uma época passada (base do índice utilizado), enquanto que a correção monetária, torna homogêneos os valores em relação a época presente (a correção monetária inflaciona os valores).

O coeficiente de correção monetária para o período t_1 é obtido através da relação:

CCM = Índice do período "t" / Índice do período "t_1", para $t_1 = 0, 1, 2, ..., t$.