Percentagens, Relativos &

Prof. Lorí Viali, Dr.
vialli@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~vialli/

Taxa e Percentagem

Taxa e Percentagem

Denominamos **taxa** *a uma fração positiva cujo denominador é cem (100).*

Por exemplo: 5/100, 1/100 ou 50/100.

As frações acima são lidas: cinco por cento, um por cento e cinqüenta por cento respectivamente.

A fração 1/100 é lida **por cento** *e representada pelo sinal* %. *Assim, as frações acima são escritas da seguinte forma: 5%, 1% e 50%. Observa-se, portanto, que o sinal % equivale à fração 1/100 ou ao decimal 0,01, pois 5% = 5/100 = 5.1/100 = 5.0,01 = 0,05.*

Normalmente a taxa é um número entre "zero" e "um", mas nada impede que ela seja superior a um, como por exemplo: 150/100 ou 150 por cento, 200/100 ou duzentos por cento.

A taxa aplicada a um valor dá origem a percentagem ou porcentagem. Assim 5% de 80 é igual a 4 (quatro), isto é, 4 é a percentagem.

Aplicação

A principal utilização das taxas ou percentagens é para comparações temporais, como, por exemplo, variações de preços de um artigo, variações nas quantidades produzidas de um bem, taxas de juros, preços de ações, etc.

Suponha-se que se deseja comparar a situação "a" de chegada com a situação "b" de partida. Pode-se escrever:

*a - b, que é denominado **desvio** ou **variação absoluta** ou então (a - b)/b que seria o **desvio relativo unitário** ou ainda [(a - b)/b].100 que é denominada **variação relativa.***

Equivalências

O desvio relativo é mais cômodo, pois independe de unidade e, por isso, é mais utilizado. Tem-se:

*(a - b)/b = a/b - 1 ou então [(a - b)/b].100 = 100.(a/b) - 100 que são as taxas unitária e percentual, ou então, os **multiplicadores:***

a/b ou (a/b).100

Diz-se que o multiplicador está associado à taxa.

Se (a - b)/b = i então a/b = 1 + i e a = b(1 + i).

"i" é a taxa e "1 + i" o multiplicador.

Dizer que uma quantidade aumenta de t% é dizer que ela é multiplicados por:

1 + t/100.

Observações:

A unidade que é somada a t/100 é causa de enganos, principalmente em "taxas" superiores a 100%. Se é evidente que:

- *Um aumento de 100% equivale a dobrar a quantidade, isto é, multiplicar por 1 + 100/100 = 2, já não é tão claro que;*

- *Um aumento de 200% seja correspondente a multiplicar a quantidade por 3, isto é, 1 + 200/100 = 3 e muito menos que;*
- *Um aumento de 900% corresponda a multiplicar a quantidade por 10, isto é, 1+ 900/100 = 10.*

Assimetria

Se "a" é a situação de chegada, "b" a de partida e "i" a taxa então: a = b.(1 + i). Assim a/b = 1 + i ou (a - b)/b = i.

No entanto, b/a = 1/(1 + i) que não é igual a "1- i".

Desta forma, um aumento de "i" por cento não é eliminado por uma baixa dos mesmos "i" por cento.

Com efeito, para eliminar um aumento de 25%, basta uma baixa de 20% e não de 25%. Se por exemplo:

a/b= 1,25 = 1 + 0,25 = 1 + 25%, então:

b/a = 1/1,25 = 4/5 = 0,8 = 1 - 20%.

Assim, "o efeito de um aumento de t% é eliminado por uma baixa menor do que t%", ou ainda, dada a taxa de aumento t, a taxa de baixa que anula este aumento é dada pela taxa t' = t/(1 + t) ou t = t'/(1 - t').

Exemplos:

1. Se "a" é 50% superior a "b, então "b" é apenas t' = 0,50/(1 + 0,50) = 0,50/1,50 = 5/15 = 1/3 = 0,333 ... = 33, 33%, inferior a "a'. Também, como 1 + 0,50 = 3/2, o inverso será: 2/3 = 1 - 1/3 = 1 - 0,3333.

2. Se "a" é 100% superior a "b", então "b" é apenas t' = 1/(1 + 1) = 1/2 = 0,50 = 50% inferior a "a". Também, como 1 + 1 = 2, o inverso é 1/2 = 1 - 1/2 = 1 - 0,50 = = 1 - 50%.

Aumentos e baixas sucessivas

Quando é necessário acumular altas ou baixas sucessivas, ou mesmo, alternar altas e baixas, deve-se multiplicar os multiplicadores, para obter o multiplicador global.

Assim, por exemplo, uma alta de 20%, seguida de outra de 30%, não dá um aumento total de 50% e sim de 1,30.1,20 = 1,56 ou 56%.

Ou seja:

$(1 + i).(1 + i') = 1 + i + i' + i.i'$

Quando se tratar de alta seguida de baixa ou vice-versa, ou ainda de baixa seguida de outra baixa, os multiplicadores das baixas devem ser inferiores a "um" e a regra anterior continua valendo.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Assim, por exemplo:

Uma baixa de 10% seguida de outra de 20% equivale a uma única de 28% e não de 30%, pois:

$(1 - 0,10).(1 - 0,20) = 0,90.0,80 = 0,72 =$
$= 1 - 0,28;$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Uma alta de 60% seguida de uma baixa de 50% equivale a uma baixa de 20%, pois: $(1 + 0,60).(1 - 0,50) = 1,60.0,50 = 0,80$ $=$

$= 1 - 0,20.$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Observação:

Em alguns casos, quando parece que se deve subtrair os multiplicadores, deve-se, na realidade, dividi-los, que é a situação recíproca de quando se acha que se deve somar os multiplicadores e, na verdade, deve-se multiplicá-los. Isto ocorre porque o quociente $(1 + t)/(1 - t')$ não é igual a $1 + t - t'$.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo:

Se num determinado período os salários aumentam 50%, mas a inflação no período é 25%, qual é o aumento real de salário, isto é, qual o aumento descontando a inflação? Ou ainda, qual foi o ganho real ou aumento do poder aquisitivo do salário?

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Tem-se:

1,50/1,25 = 150/125 = 6/5 = 1,20 =

= 1 + 20%, ou seja, 20% e não, como poderia parecer a princípio, 50% - 25% = 25%.

Relativos

Dados dois números reais "a" e "b", denomina-se números relativos ou simplesmente relativos aos números: a/a = 1 e b/a se "a" for escolhido como unidade ou base. Da mesma forma, se "b" for escolhido como unidade ou base, se terá, então, os relativos: b/b = 1 e a/b.

A escolha da base não recai necessariamente sobre um dos dois valores envolvidos, mas pode ser qualquer outro valor, tal como, por exemplo, a média entre os dois valores.

Tipos de Relativos:

Pode-se ter relativos de vários tipos. Mas os mais comuns são os relativos de preços e os relativos de quantidade.

Relativos de preços

Seja "p_0" o preço de um determinado artigo no tempo t = 0 e "p_n" o preço, deste mesmo artigo, no tempo t = n.

Define-se, preço relativo do Artigo A no tempo t = n, com base no tempo t = 0, como sendo o quociente: $p(0, n) = p_n / p_0$

Exemplos:

O litro de leite em 2003 custava R$ 0,80 e em 2004 R$ 1,00. O relativo de preço do litro de leite em 2004 com base em 2003 é: p(03, 04) = 1,00 / 0,80 = 1,25 ou 125%. Ou seja, o preço do litro de leite em 2004 é 25% maior do que em 2003.

Também, se pode calcular:

p(04, 03) = 0,80 / 1,00 = 0,80 = = 1 - 0,20.

Ou seja, o leite em 2003 custava 20% menos do que em 2004.

Relativos de quantidade

Seja q_0 a quantidade produzida de um determinado artigo "A" no tempo t = 0 e q_n a sua quantidade produzida no tempo t = n. A quantidade relativa produzida (vendida, consumida, exportada, etc.) do artigo "A" no tempo "n" em relação ao tempo "0" é definida como sendo:

$$q(0, n) = q_n/q_0$$

Relativos de valor

Seja "p" o preço de um artigo "A" e "q" a quantidade produzida deste mesmo artigo. Denomina-se valor total ou simplesmente valor ao produto v = p.q.

Define-se valor relativo de um artigo "A" no tempo t = n, com base no tempo t = 0, como sendo o quociente:

$$v(0, n) = (p_n q_n) / (p_0 q_0) = v_n / v_0$$

Ou também:

$v(0, n) = v_n/v_0 = (p_n/p_0)/(q_n/q_0) =$
$= p(0, n). q(0, n).$

Desta forma, o relativo de valor pode, também, ser caracterizado como sendo o **produto** do **relativo de preço** pelo **relativo de quantidade**.

Propriedades dos Relativos

Identidade

Um relativo de um determinado período, com base no mesmo período é sempre igual a unidade ou 100%, isto é:

$$p(0, 0) = p(1, 1) = 1$$

Reversibilidade no tempo

Um relativo é sempre reversível, isto é, quando invertemos a situação corrente (ou atual) com a situação base o índice inverte-se, ou seja: $p(0, n) = 1 / p(n, 0)$, *ou ainda, pode-se escrever esta propriedade da seguinte forma:*

$p(0, n).p(n, 0) = 1.$

Transitividade ou circular

Um relativo é sempre transitivo, ou seja:

Se "0", "1" e "2" são 3 períodos de tempo sucessivos, então:

$p(0, 1).p(1, 2) = p(0, 2)$

Ou também:

$p(0, 1).p(1, 2).p(2, 0) = 1$

Apresentação dos Relativos

Os relativos de preços, quantidade ou valor são, normalmente, apresentados em seqüências que podem ser:

(a) de base fixa;

(b) de base móvel.

Relativos de Base Fixa

Considere os valores X_0 , X_1, X_2, ..., X_n *como sendo os preços (ou quantidades) de um artigo "A" nas épocas t = 0, 1, 2, ..., n.*

As razões (quocientes):

X_0 / X_0, X_1 / X_0, X_2 / X_0, ..., X_n / X_0

são os relativos de base fixa, em t = 0, do artigo "A", nos tempos t = 0, 1, 2, ..., n.

Tabela 01 – Relativos de Base Fixa

Ano	Preços	Relativos
0	X_0	$X_0/X_0 = 1,00$
1	X_1	X_1/X_0
2	X_2	X_2/X_0
...	...	...
n	X_n	X_n/X_o

Exemplo 1

Relativos de Base Fixa em 2001.

Ano	Preços	Relativos
2000	190	95,0
2001	200	100,0
2002	205	102,5
2003	210	105,0
2004	220	110,0

Observando-se a tabela do exemplo 1 pode-se constatar que: o preço do artigo "A" em 2002 é 2,5% maior do que o de 2001. O preço do mesmo artigo em 2000 era 5% menor do em 2001 (base), pois 0,95 = 1 - 0,05.

Relativos de Base Móvel

A seqüência dos relativos de base móvel (também chamados de relativos em cadeia ou números elo) é obtida de modo semelhante aos relativos de base fixa. Só que a base, nesse caso são sucessivamente os valores: X_0, X_1, X_2, ... , X_{n-1}, nos tempos t = 0, 1, 2, ..., n.

Tabela 02 – Relativos de Base Móvel

Ano	Preços	Relativos
0	X_0	---
1	X_1	X_1/X_0
2	X_2	X_2/X_1
...	...	...
n	X_n	X_n/X_{n-1}

Exemplo 2

Relativos de Base Móvel

Ano	Preços	Relativos
2000	190	---
2001	200	105,26
2002	205	102,50
2003	210	102,44
2004	220	104,76

Observando-se o exemplo 2 pode-se ver que 2001 apresentou um aumento de 2,50% em relação a 2000. Que 2004 apresentou um aumento de 4,76% em relação a 2003.

Mudanças de Base

Ao se considerar uma série de relativos poderá ser necessário estabelecer comparações, que não estão disponíveis na série apresentada. Se os valores originais (preços, produção, etc.) estiverem disponíveis, isto não trará maiores problemas, pois bastará calcular os novos valores necessários.

Mas, normalmente, uma vez obtida a série de relativos os valores originais não mais estão disponíveis. Neste caso, poderá ser necessário realizar mudanças de base, isto é, mudar de uma base fixa para outra base fixa, de uma base móvel para uma fixa ou vice-versa.

Mudança de Base Fixa para Fixa

Dispondo-se de uma série de relativos com base no período "t" deseja-se obter uma nova série com base em t'. Para tanto é suficiente apenas dividir toda a série de relativos (com base em t) pelo relativo da nova base (t'). A próxima tabela ilustra o procedimento.

Tendo os relativos de base fixa em 2001 (segunda coluna) quer-se mudar a base para o ano de 2000. Isto pode ser feito, simplesmente, dividindo a coluna 2 (dos relativos com base em 2001) pelo valor 0,95, que é o relativo de base fixa do ano de 2000.

Mudança de Base Fixa para Fixa

Ano	Fixa em 01	Fixa em 00
2000	95,0	100,00
2001	100,0	105,26
2002	102,5	107,89
2003	105,0	110,53
2004	110,0	115,79

Mudança de Base Fixa para Móvel

Dispondo de uma série de relativos de base fixa (período "t") deseja-se obter a série de relativos de base móvel. Para tanto toma-se cada relativo de base fixa e divide-se pelo anterior. Obviamente o primeiro relativo de base móvel não poderá ser calculado, a menos que se disponha do valor original anterior.

A próxima tabela ilustra o procedimento. Neste caso os relativos de base fixa (segunda coluna) estão com base no período t = 2000. Para obter os relativos encadeados (coluna 3) o procedimento será o mesmo não importa qual tenha sido o período tomado como base na série de base fixa.

Mudança de Base Fixa para Móvel

Ano	Fixa em 00	Encadeados
2000	100,00	---
2001	105,26	105,26
2002	107,89	102,50
2003	110,53	102,44
2004	115,79	104,76

Mudança de Base Móvel para Fixa

Dispondo de uma série de relativos com base móvel deseja-se obter uma nova série com base em um período $t = t_0$. Para tanto é necessário fazer uso das propriedades circular e reversível. Na verdade, isto pode ser feito de duas maneiras.

A mais simples é obter a série de relativos com base no primeiro período da série e depois, então, fazer a mudança para a base desejada. Neste caso, a única propriedade empregada é a circular.

A segunda forma, um pouco mais elaborada, é obter os relativos na base desejada diretamente. Nesta situação, é necessário o emprego das propriedades circular e reversível em conjunto.

Mudança de Base Móvel para Fixa

Primeira forma.

Ano	Encadeados	Fixa em 00
2000	---	1,0000
2001	105,26	1,0000.1,0526 = 1,0526
2002	102,50	1,0526.1,0250 = 1,0789
2003	102,44	1,0789.1,0244 = 1,1053
2004	104,76	1,1053.1,0476 = 1,1579

Mudança de Base Móvel para Fixa

Segunda forma.

Ano	Encadeados	Fixa em 02
2000	---	0,9756*(1/1,0526) = 0,9268
2001	105,26	1/1,0250 = 0,9756
2002	102,50	1,0000
2003	102,44	1,000.1,0244 = 1,0244
2004	104,76	1,0244.1,0476 = 1,0732

Resolver os exercícios da Apostila.