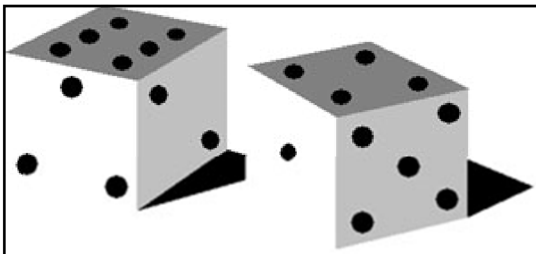


Mat02246 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Tipos de Modelos

Sistema Real

Modelo

Determinístico

Probabilístico

Modelo Determinnístico

Causas $\Rightarrow$ **Efeito**

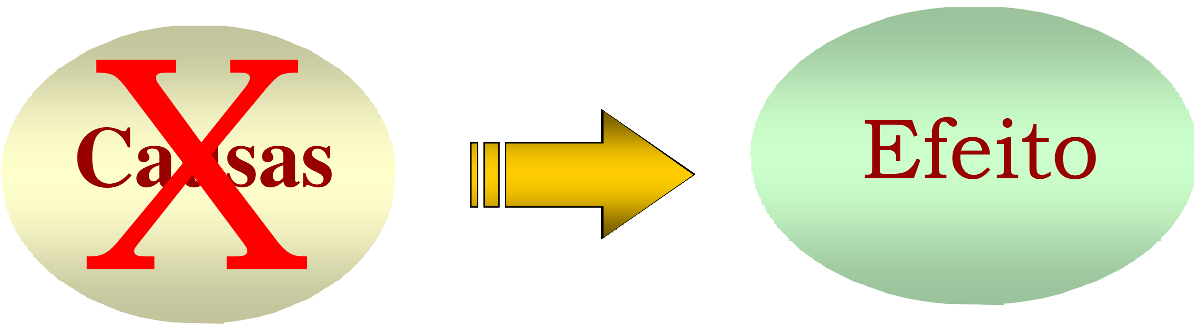
Exemplos

Gravitação → $F = GM_1M_2/r^2$

Aceleração clássica → $v = at$

Aceleração relativística → $v = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 t^2}{c^2}}}$

Modelo Probabilístico



Exemplos

Binomial

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} & x\in\{0,1,\ldots,n\}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Poisson

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!} & x\in \mathbf{N}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Normal

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\quad x\in\Re$$

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Características

❶ Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

❷ Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;

❸ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de freqüências.

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;

E_3: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas;

E_4: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

E_5: Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;

E_6: Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;

E_7: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Espaço Amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplos

$$S_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

S_3 = { cccc, ccck, cckc, ckcc,

kccc, cckk, kkcc, ckkc,

kcck, ckck, kckc, kkkc,

kkck, kckk, ckkk, kkkk}

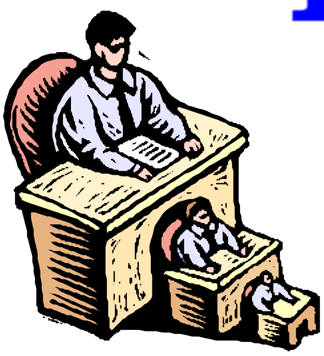
$$S_4 = \{ t \in R \, / \, t \geq 0 \}$$

$$S_5 = \{1, 2, 3, ...\}$$

$S_6 = \{\diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$

$S_7 = \{$ (1, 1), (1, 2),(1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) $\}$

Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Seja $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ um espaço amostra.

Então são eventos:

$A = \{ 1, 3, 5\}$ $B = \{ 6 \}$

$C = \{ 4, 5, 6\}$ $D = \varnothing$ $E = S$

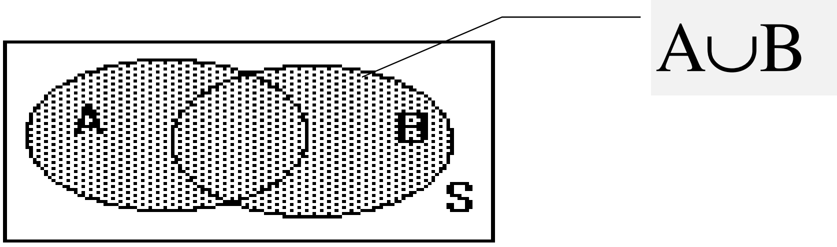
Ocorrência de um evento

Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Combinação de eventos

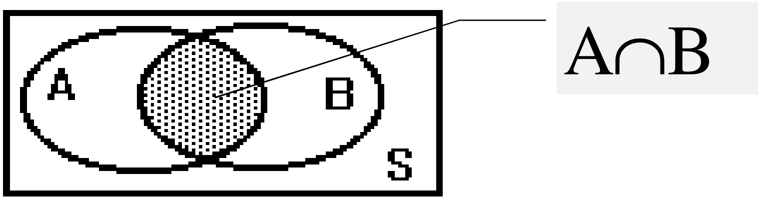
Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.



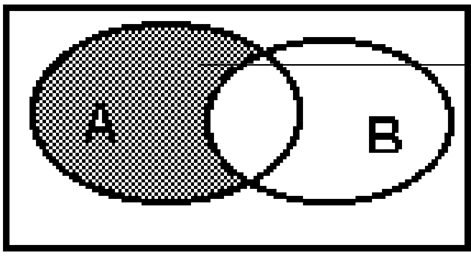
Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

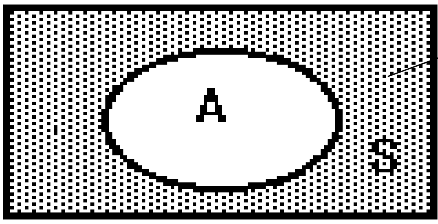
A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.



A - B

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

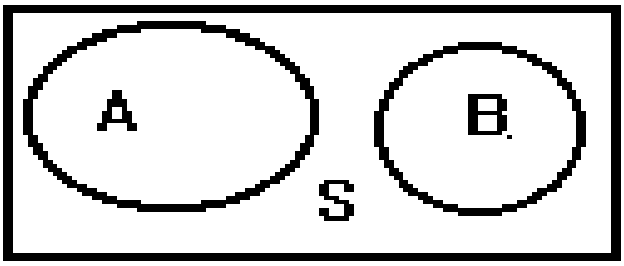
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$$A' = A^C = \bar{A}$$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.

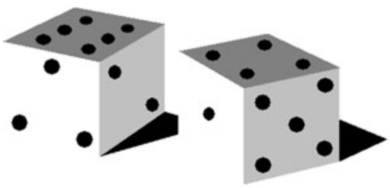


Conceitos de Probilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQÜENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Exemplo

Qual a probabilidade de ganhar na Loto Fácil?

Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$

$$P(\text{Loto Fácil}) =$$

$$= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0{,}000031\%$$

Freqüência Relativa

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta “FACE SEIS” 18 vezes.

Então, a freqüência relativa de “FACE SEIS” é:

$$fr_6 = \frac{\text{número de vezes que "f\_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}} = \frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\%$$

Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Conseqüências dos Axiomas (Teoremas)

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Probabilidade Condicionada

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.

Suponha que desta urna são retiradas "duas" fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

A = { a primeira ficha é branca}

B = { a segunda ficha é branca}

Então:

$$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$$

$$P(B) = ?/49$$

Neste caso, não se pode avaliar P(B), pois para isto é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$$P(B|A) = 9/49 = 0{,}1837 = 18{,}37\%$$

Observe a notação

Esta representação é lida:

P de B dado A;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A.

Definição:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Mas:

Se $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

Também:

Se $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

Assim:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A|B).P(B)$$

Esse resultado é conhecido como:

Teorema da multiplicação

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Definição:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Observação:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

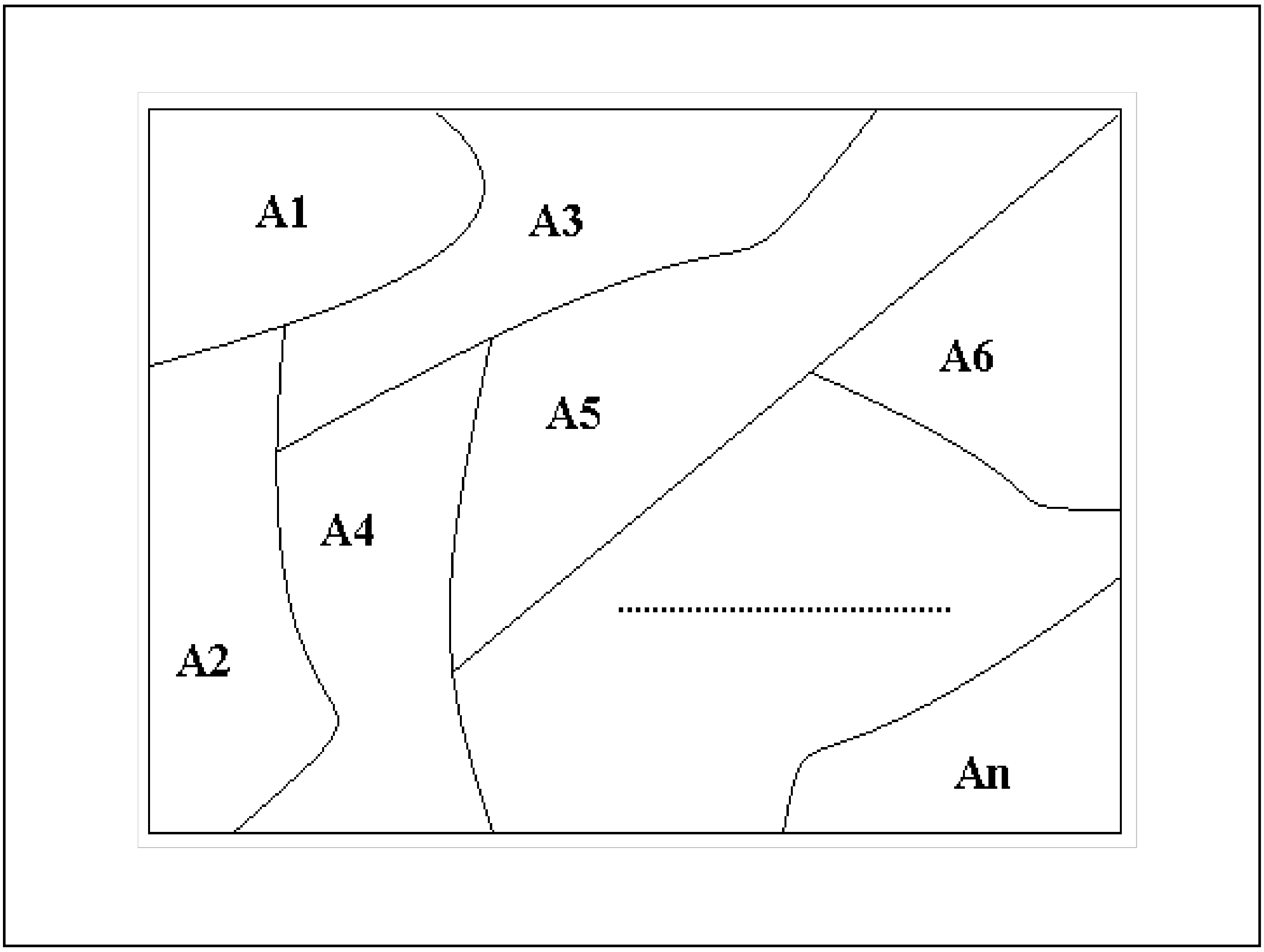
$A_1, A_2, ..., A_n$

eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

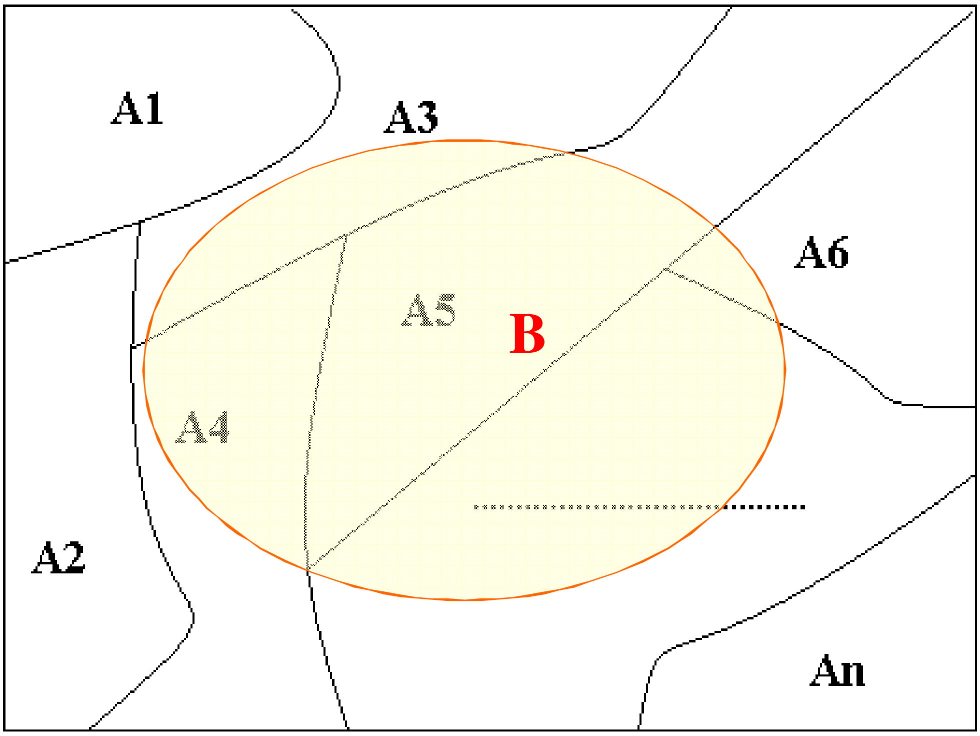
(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

(3) $P(A_i) > 0$, para todo i

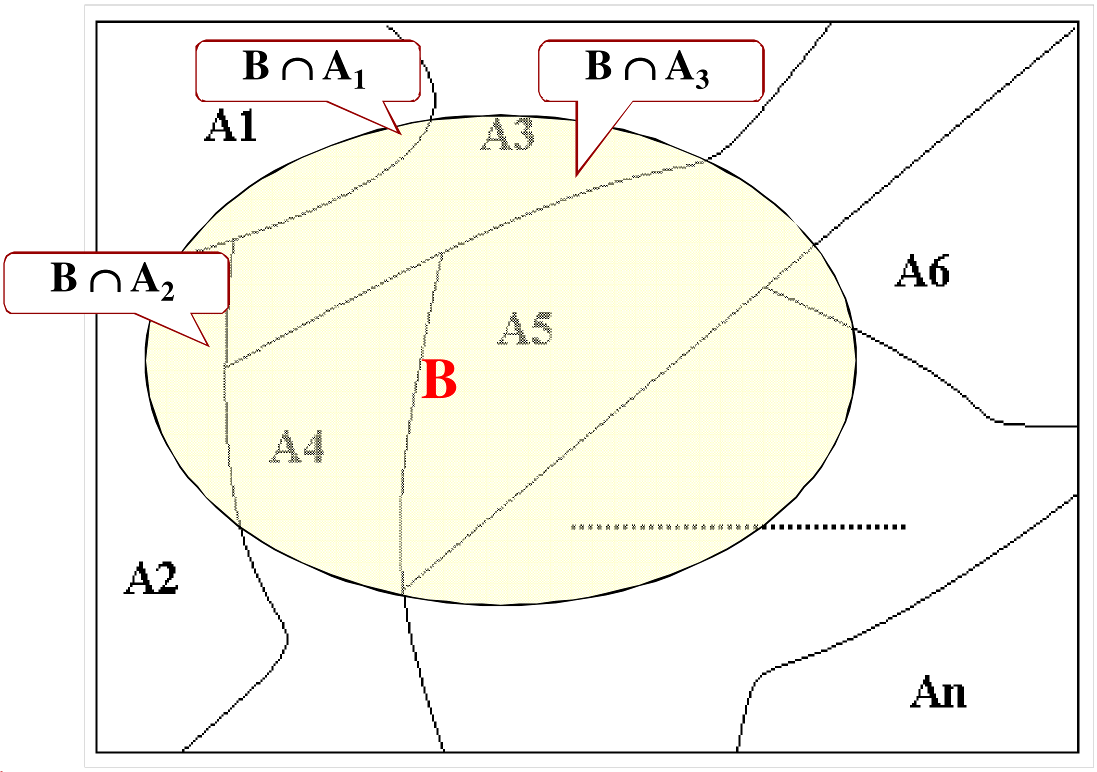

A1
A3
A6
A5
A4
A2
....
An

Teorema da probabilidade total


A1
A3
A6
A5
B
A4
A2
An

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$



B ∩ A1
B ∩ A3
A1
A3
B ∩ A2
A6
A5
B
A4
A2
An

P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Assim: $P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$

Exemplo

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina "A" participa com 20% da produção, a "B" com 30% e a "C" com 50%.

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad$ $P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad$ $P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad$ $P(D|C) = 1\%$

$$P(D) = \sum P(A_i).P(D|A_i)$$

Então:

$P(D) =$

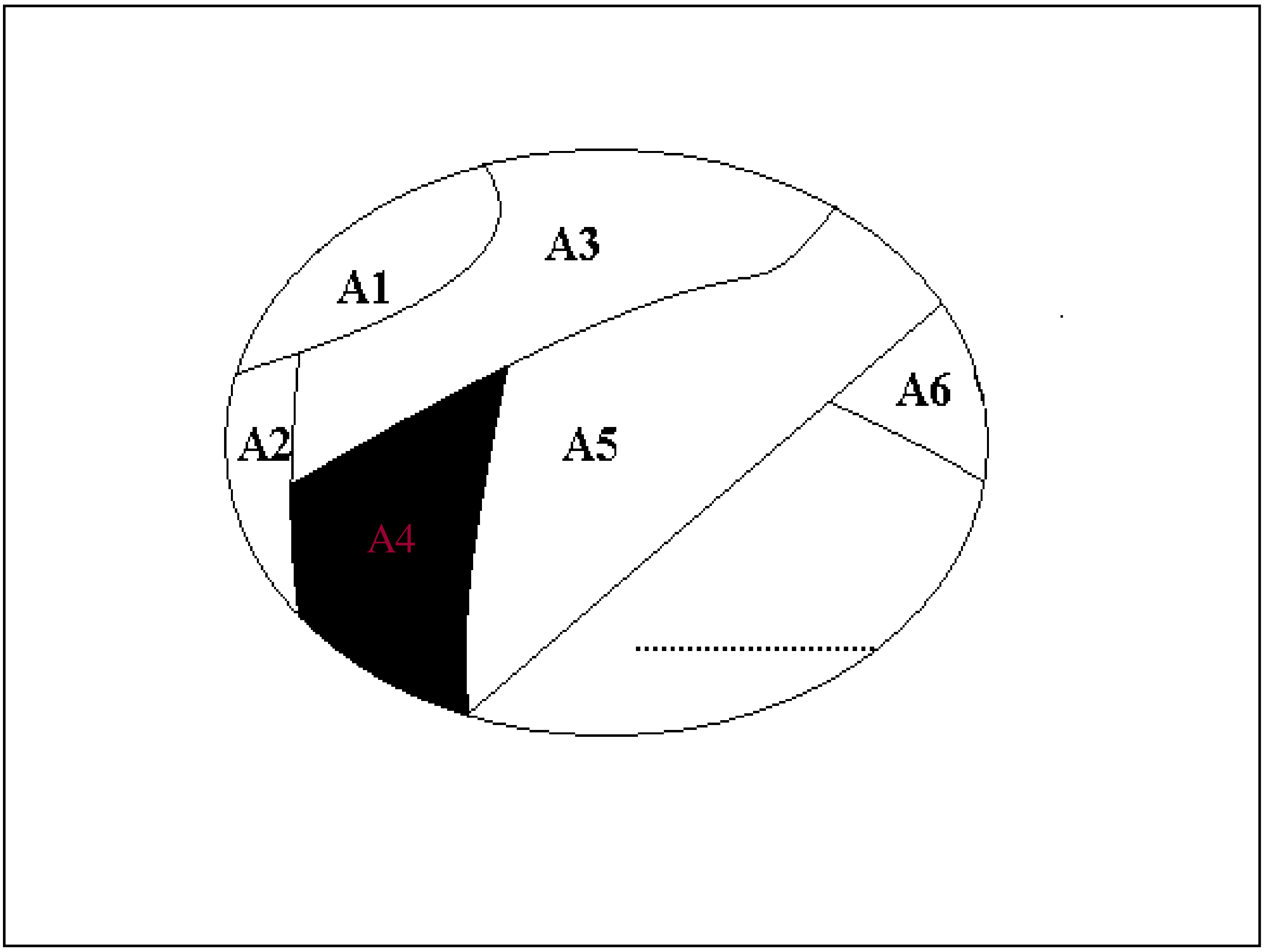
$= P(A).P(D|A) + P(B).P(D|B) + P(C).P(D|C) =$

$= 0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01 =$

$= 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}005 =$

$= 0{,}024 = 2{,}40\ \%$

Teorema de Bayes


A1
A3
A2
A5
A6
A4

Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos "A_i" (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer "B".

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$P(A_i | B) =$$

$$= P(A_i \cap B) / P(B) =$$

$$= P(A_i).P(B|A_i) / P(B)$$

Na expressão:

$$P(A_i | B) = P(A_i).P(B|A_i) / P(B)$$

o valor de P(B) (denominador) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad$ $P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad$ $P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad$ $P(D|C) = 1\%$

$$P(D) = 2{,}40\%$$

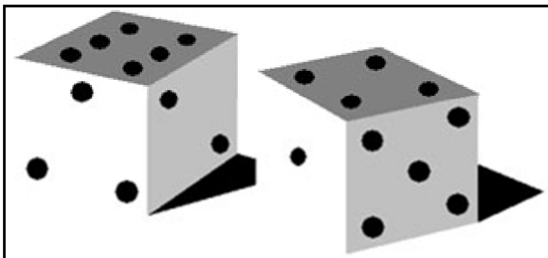
Então:

$$P(A \mid D) =$$

$$= \frac{P(A).P(D \mid A)}{P(A).P(D \mid A) + P(B).P(D \mid B) + P(C).P(D \mid C)} =$$

$$= \frac{0,20.0,05}{0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01} =$$

$$= \frac{0,01}{0,024} = 41,67\%$$



Mat02246 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@mat.ufrgs.br

http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua.**

A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada $x \in X(S)$ um número $f(x)$ que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x).dx = 1$$

A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares (x, f(x)) é denominada de distribuição de probabilidade da VAC X.

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de "c" para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de "c", devemos igualar a área total a um, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = 1$$

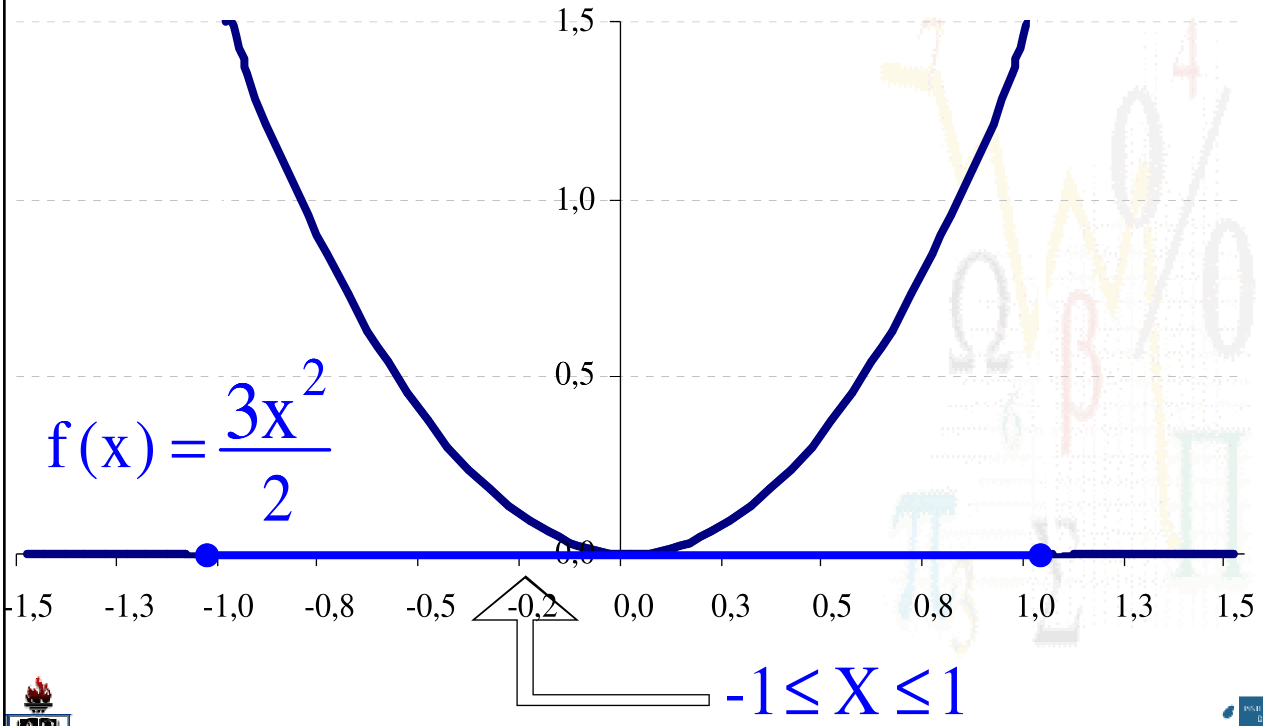
Tem-se:

$$\int_{-1}^{1} c.x^2\,dx = \quad c\int_{-1}^{1} x^2\,dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

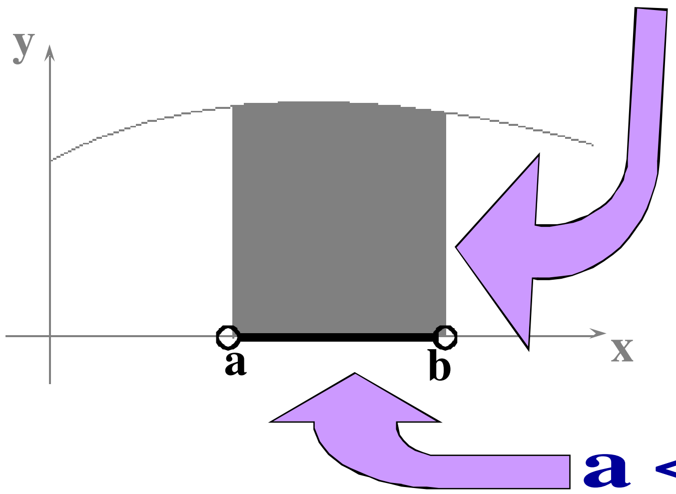
Representação Gráfica



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculo da Probabilidade

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



$$a < X < b$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Observações

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5].

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(-0,5 < X < 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2}[(0,5)^3 - (-0,5)^3] = 12,50\%$$

VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int x f(x)dx$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \left(\int x f(x)dx\right)^2 =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$

A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "x".

Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3u^2}{2}\,du & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos determinar o valor da integral em “u”:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2}\int_{-1}^{x} u^2 du =$$

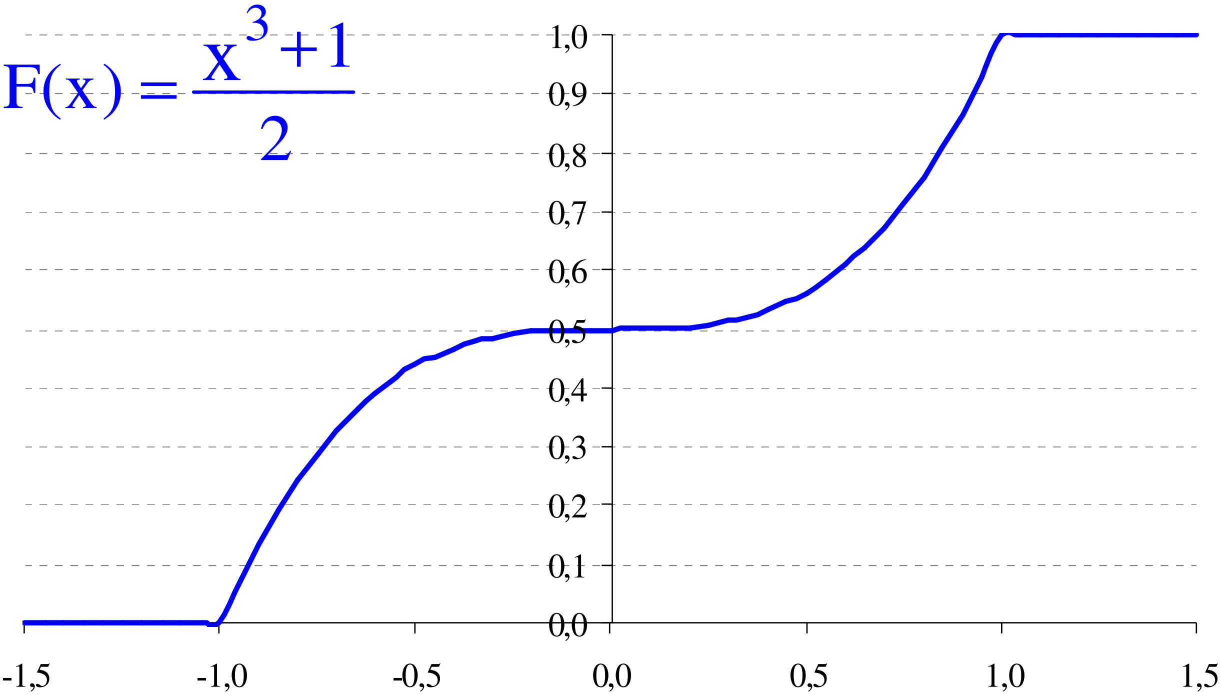
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}[u^3]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{2}$$

Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \dfrac{x^3+1}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Representação Gráfica

$$F(x) = \frac{x^3+1}{2}$$



Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \le x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Modelos Probabilísticos Contínuos

- Normal
- t (Student)
- χ^2 (Qui-Quadrado)
- F (Fisher/Snedecor)