

Mat02219 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.

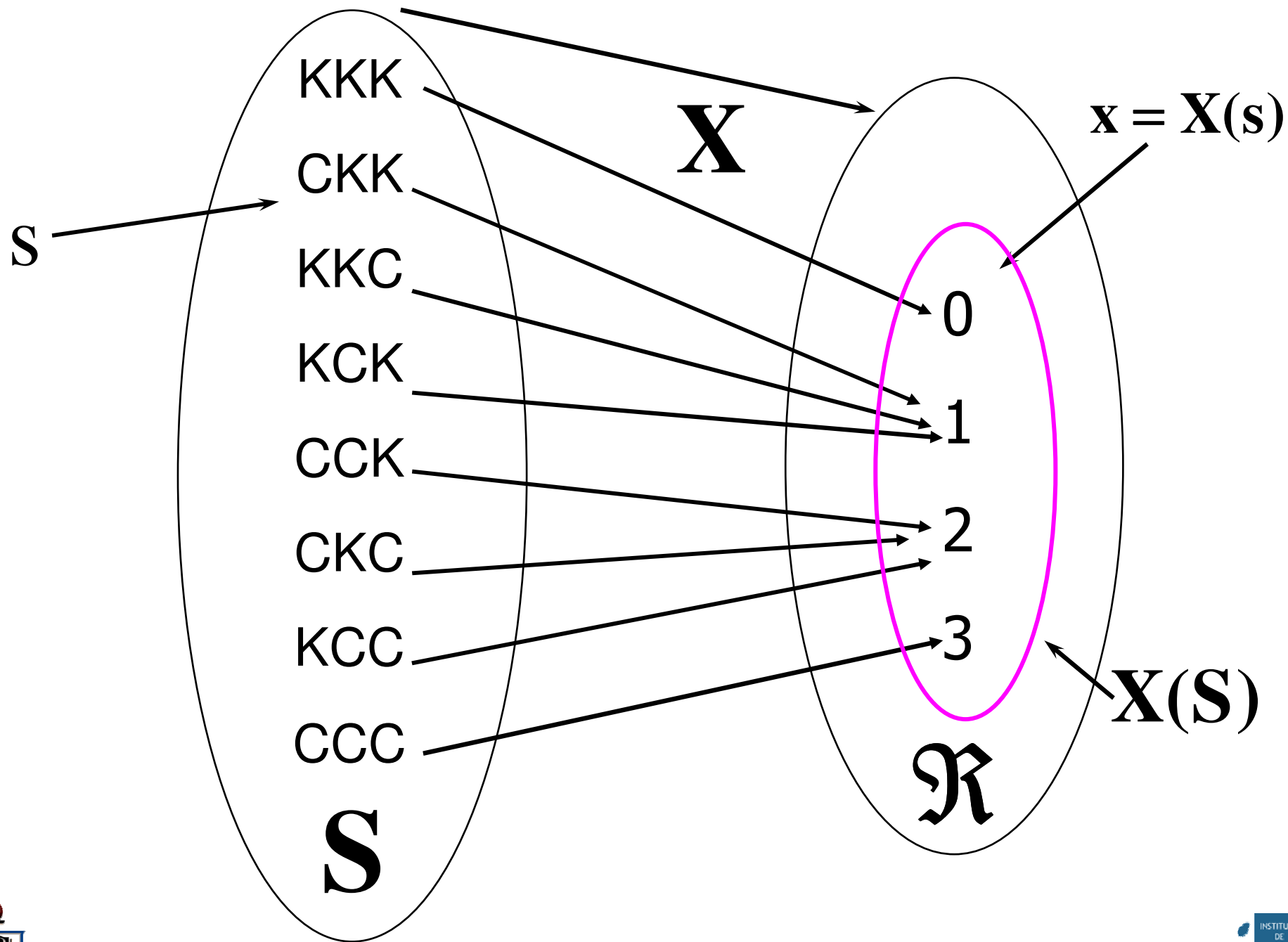
viali@mat.ufrgs.br

<http://www.mat.ufrgs.br/~viali/>

2/4

Variável Aleatória e VAD





Variável Aleatória

Uma função X que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada **variável aleatória**.



Conjunto de valores

O conjunto formado por todos os valores “x”, isto é, a imagem da variável aleatória X , é denominado de conjunto de valores de X .

$$\mathbf{X(S)} = \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R} \mid \mathbf{X(s)} = \mathbf{x} \}$$



Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores

– $X(S)$ – uma variável aleatória
poderá ser discreta ou contínua.



Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for **finito**
ou então **infinito enumerável** a
variável é dita discreta.



Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.



Variável Aleatória Discreta



A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $x_i \in X(S)$ o número $f(x_i) = P(X = x_i)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$f(x_i) \geq 0, \text{ para todo "i"}$$

$$\sum f(x_i) = 1$$



A distribuição de probabilidade

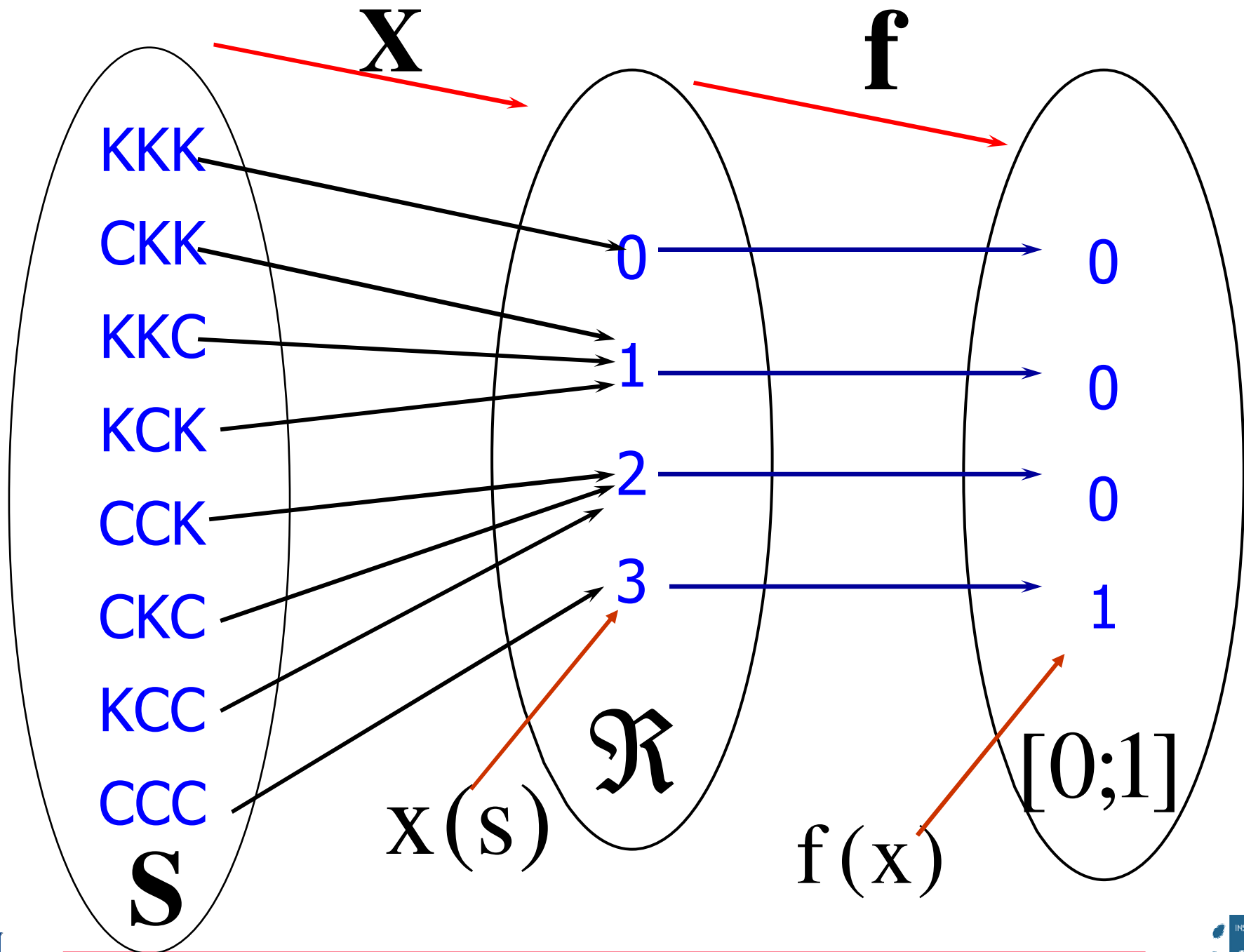
A coleção dos pares $[x_i, f(x_i)]$ para $i = 1, 2, 3, \dots$ é denominada de distribuição de probabilidade da VAD X .

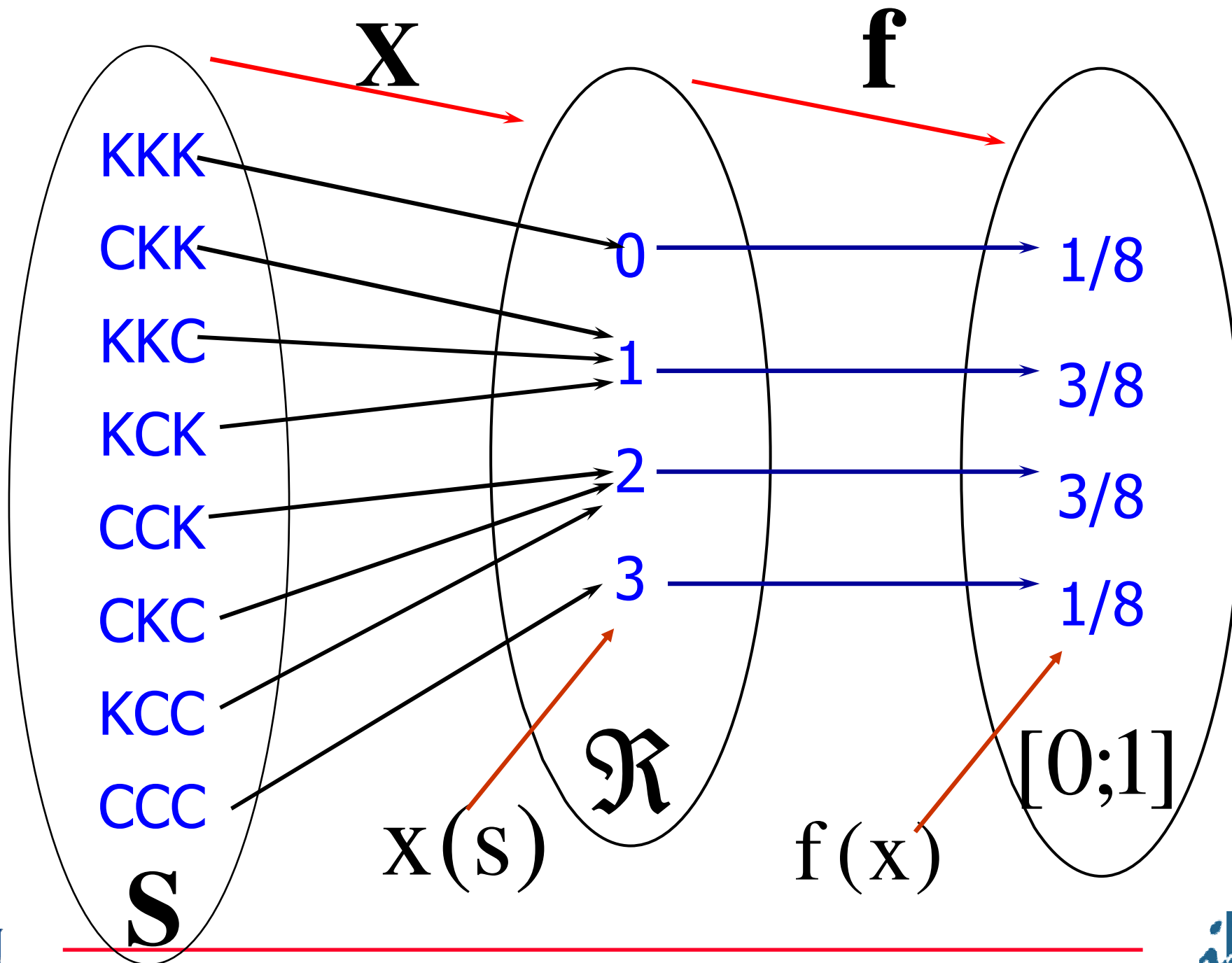


Exemplo

Suponha que uma moeda equilibrada é lançada três vezes. Seja $X =$ “número de caras”. Então a distribuição de probabilidade de X é:







Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então $X = \text{“soma do par”}$ é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:



Como $X((a, b)) = a + b$, o conjunto de valores de X é dado por:

$$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$



A função de probabilidade $f(x) = P(X = x)$, associa a cada $x \in X(S)$, um número no intervalo $[0; 1]$ dado por:

$$\begin{aligned} f(x) &= P(X = x) = P(X(s) = x) = \\ &= P(\{x \in X(S) \mid X(s) = x\}) \end{aligned}$$



Desta forma:

$$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$$

$$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$$

.....

$$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$$

$$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$$

A distribuição de probabilidade será:



A distribuição de probabilidade de
X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



Representação de uma Distribuição de Probabilidade

Através de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama



Tabela

Seja $X =$ “número de caras”, obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a da tabela ao lado.

x	$f(x)$
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1



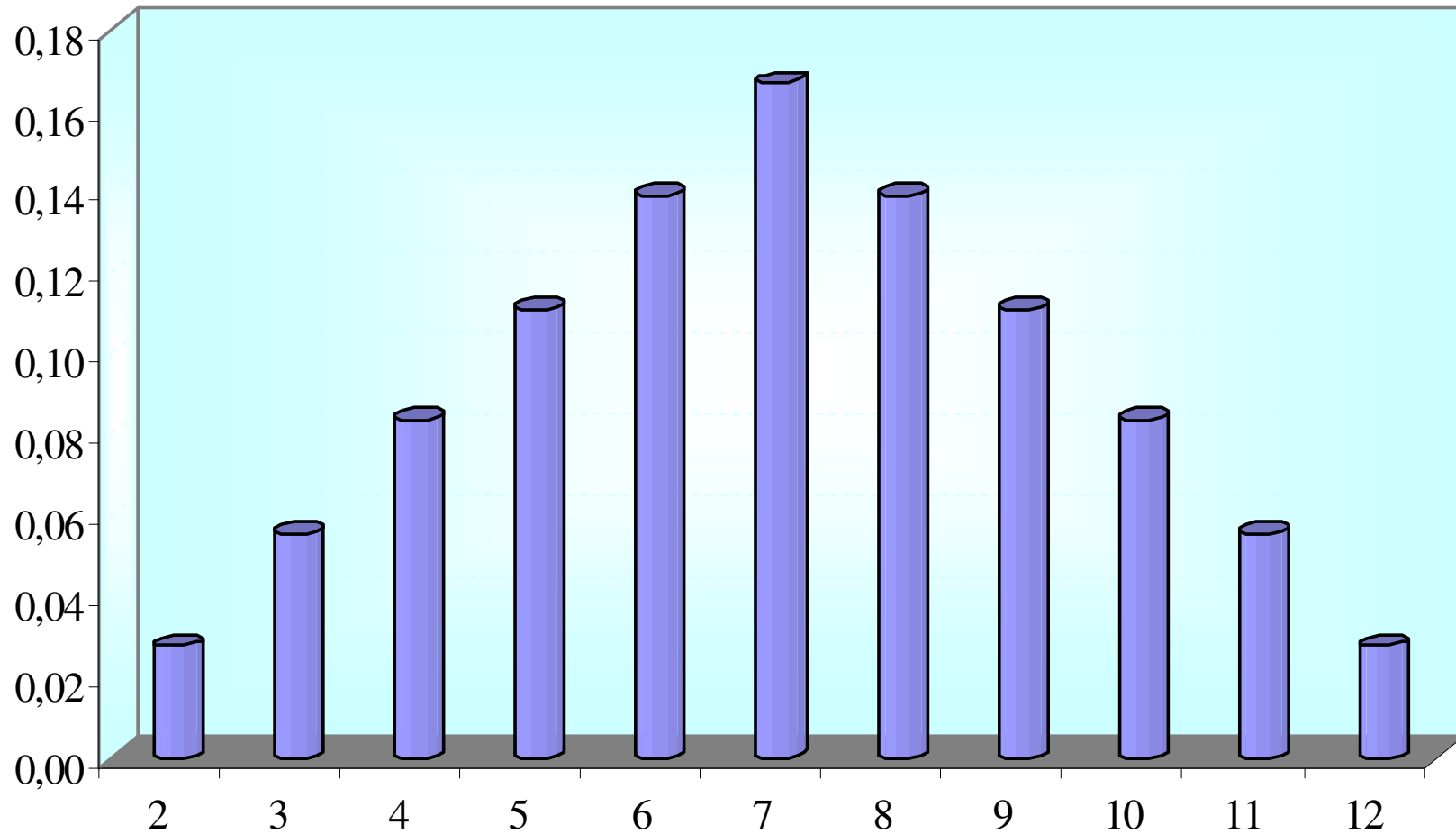
Expressão Analítica

Considere $X =$ “soma do par”, no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbf{X(S)} &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\rightarrow (x - 1)/36 \quad \text{se } x \leq 7 \\ &\quad (12 - x + 1)/36 \quad \text{se } x > 7 \end{aligned}$$



Diagrama



VAD - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado
(*Expectation*)

$$\mu = E(X) = \sum \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{x} \cdot P(X = \mathbf{x})$$

(b) Variância (*Variance*)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mu)^2 = \sum \mathbf{x}^2 f(\mathbf{x}) - \mu^2 = \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$



(iii) Desvio Padrão

(Standard Deviation)

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

(Variation Coefficient)

$$\gamma = \sigma/\mu$$



Definições:

Seja X uma VA. O momento de ordem “ k ” de X é o valor $E(X^k) = \mu_k$, se esse valor convergir.

Obs.: A expectância é o primeiro momento.



Seja X uma VA. O momento central de ordem “ k ” de X é o valor $E[(X - E(X))^k] = E[(X - \mu)^k]$, se esse valor convergir.

Obs.: (i) A variância é o segundo momento central;



- (ii) O primeiro momento central é sempre zero;
- (iii) O terceiro momento central é utilizado para determinar a assimetria de uma distribuição;
- (iv) O quarto momento central é utilizado na determinação da curtose de uma distribuição.



Se X é um VAD então o k -ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k f(x_i)$$

e o k -ésimo momento central de X é

obtido por:
$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^k f(x_i)$$



Considerando que o momento de ordem “k” de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado.

Tem-se, então:



(a) Expectância, valor esperado

$$\mu_1 = E(X)$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

(c) Assimetria

$$\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3$$



(v) Curtose

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3 = \\ &= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3\end{aligned}$$



Exemplo

Calcular o valor esperado, a variabilidade da variável $X =$ “número de caras” no lançamento de quatro moedas honestas.



Cálculos

x	f(x)	x.f(x)	x ² f(x)	x ³ f(x)	x ⁴ f(x)
0	1/16	0	0	0	0
1	4/16	4/16	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16	48/16	96/16
3	4/16	12/16	36/16	108/16	324/16
4	1/16	4/16	16/16	64/16	256/16
Σ	1	2	5	14	42,5



Tem-se:

$$\mu_1 = 2; \mu_2 = 5; \mu_3 = 14 \text{ e } \mu_4 = 42,5$$

Assim:

$$(i) E(X) = \mu_1 = 2 \text{ caras}$$

$$(ii) \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = 5 - 4 = 1 \text{ cara}$$

$$(iii) \gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3 = \\ = 14 - 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 30 - 30 = 0$$



(iv) Curtose

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3 \\ &= 42,5 - 4.2.14 + 6.4.5 - 3.16 - 3 = \\ &= 42,5 - 112 + 120 - 48 - 3 = 2,5 - 3 \\ &= -0,50\end{aligned}$$



Outros Resultados

Moda

$$m_o = 2 \text{ caras}$$

Mediana

$$m_e = 2 \text{ caras}$$



Propriedades

Da expectância ou valor esperado

(i) Linearidade

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(ii) Lei da expectativa total, ou lei da expectativa iteradas ou lei da torre

$$E[E(X/Y)] = E(X)$$



(iii) Não multiplicativa

$$E(XY) \neq E(X)E(Y), \text{ em geral}$$

$$(iv) E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$



Da variância

(i) $V(a) = 0$

(ii) $V(aX + b) = a^2V(X)$

(iii) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ se X e Y forem independentes.



Exercício

Três dados honestos são lançados. Seja $X =$ produto dos resultados. Determine a distribuição de X e calcule os momentos até a quarta ordem.



A partir dos momentos,

determinar:

(i) A expectância

(ii) A variância

(iii) A assimetria

(iv) A curtose



A Função de Distribuição (FD)

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua). A função de distribuição (acumulada) ou simplesmente “função de repartição” é definida por: $F(x) = P(X \leq x)$.



Propriedades da FD

$$(a) 0 \leq F(x) \leq 1;$$

$$(b) F(x_1) \leq F(x_2) \text{ se } x_1 < x_2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$



Determinação de probabilidades a partir da FD

(i) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a);$

(ii) $P(X > a) = 1 - F(a)$ e

(iii) $P(X < b) = F(b)$



VAD e FD

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) então a FD é a função em escada dada por:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}} P(X = \mathbf{x}_i)$$



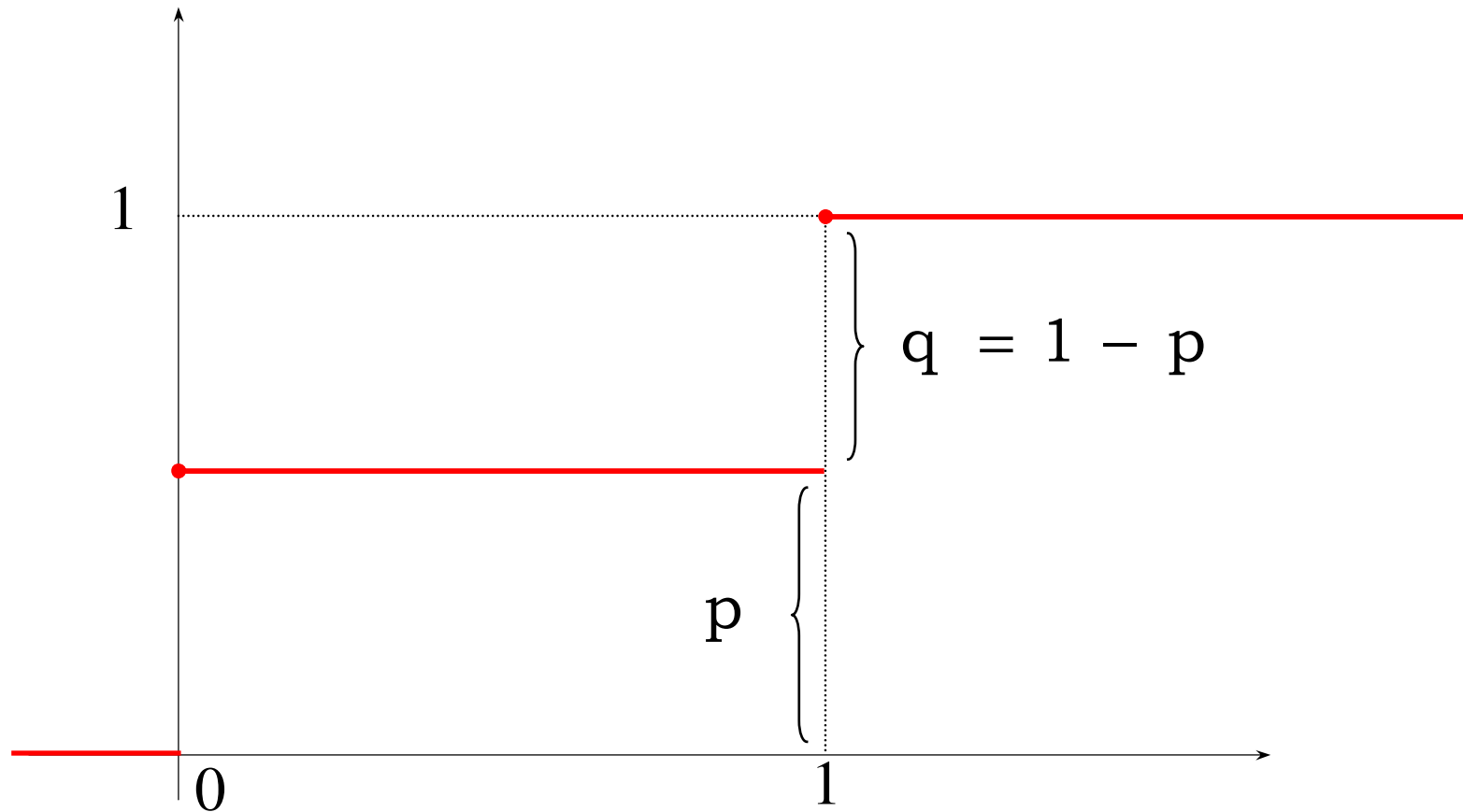
Exemplo:

Seja $X =$ número de caras no lançamento de uma moeda. Então a FD de X é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



A Função de Distribuição



Observação:

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) com FD $F(x)$, então:

$$P(X = x_i) = f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$



Exercício:

Uma fonte de informação gera símbolos ao acaso a partir de um alfabeto de quatro letras $\{ a, b, c, d \}$ com probabilidades $f(a) = 1/2$, $f(b) = 1/4$ e $f(c) = f(d) = 1/8$. Um esquema codifica esses símbolos em binário da seguinte forma: $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 10$, $c \rightarrow 110$, $d \rightarrow 111$. Seja X a VA que representa o tamanho do código, isto é, o número de dígitos binários (bits).



- (a) Qual é o conjunto de valores de X ?
- (b) Assumindo que a geração dos símbolos são independentes, encontre: $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ e $P(X > 3)$.
- (c) Determine a FD de X .
- (d) Represente a FD graficamente.



Modelos Discretos de Probabilidade



- Bernoulli
- Binomial
- Hipergeométrica
- Poisson



Bernoulli



Experimento

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.



Conjunto de Valores

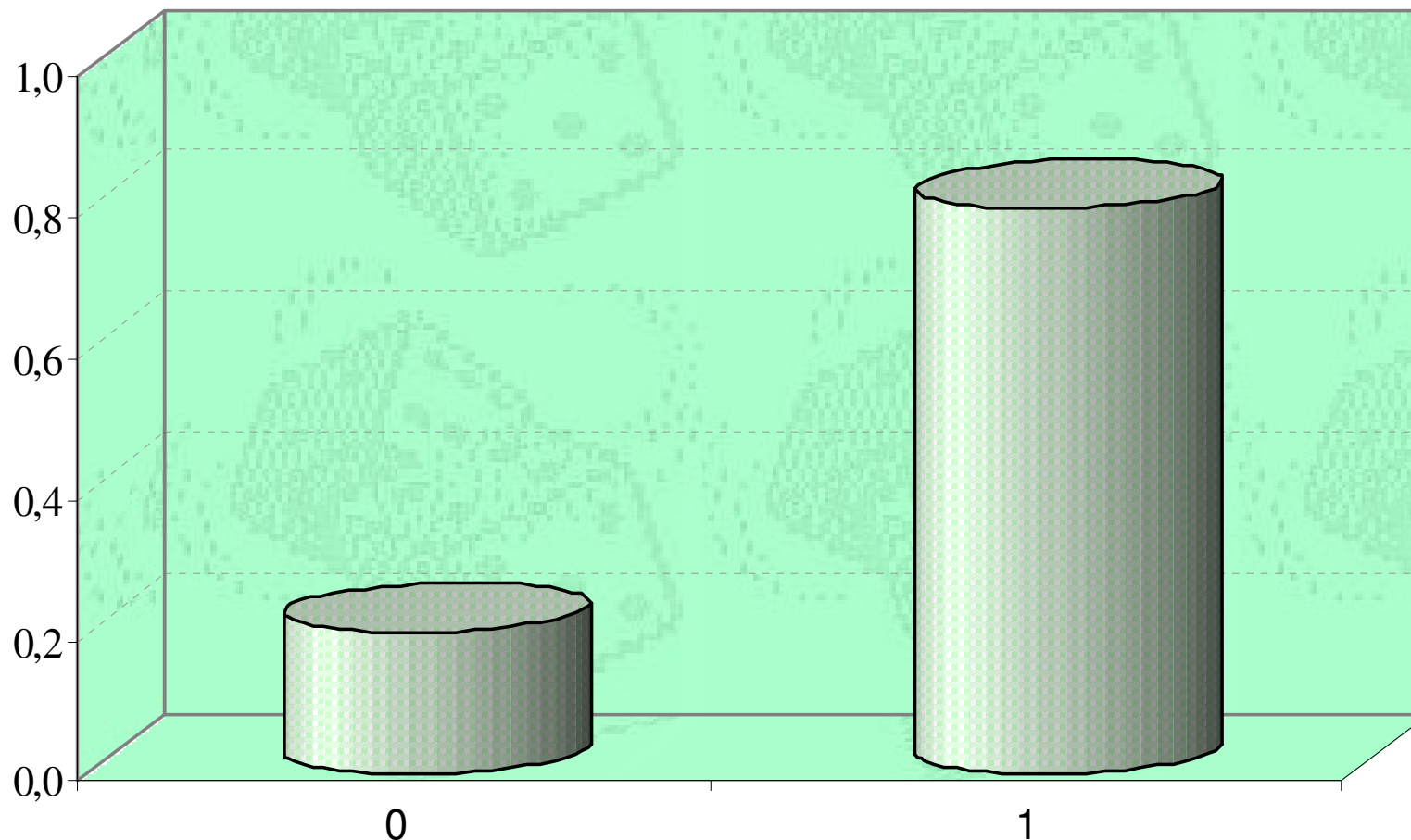
$$X(S) = \{ 0, 1 \}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



A Função de Probabilidade (fp)

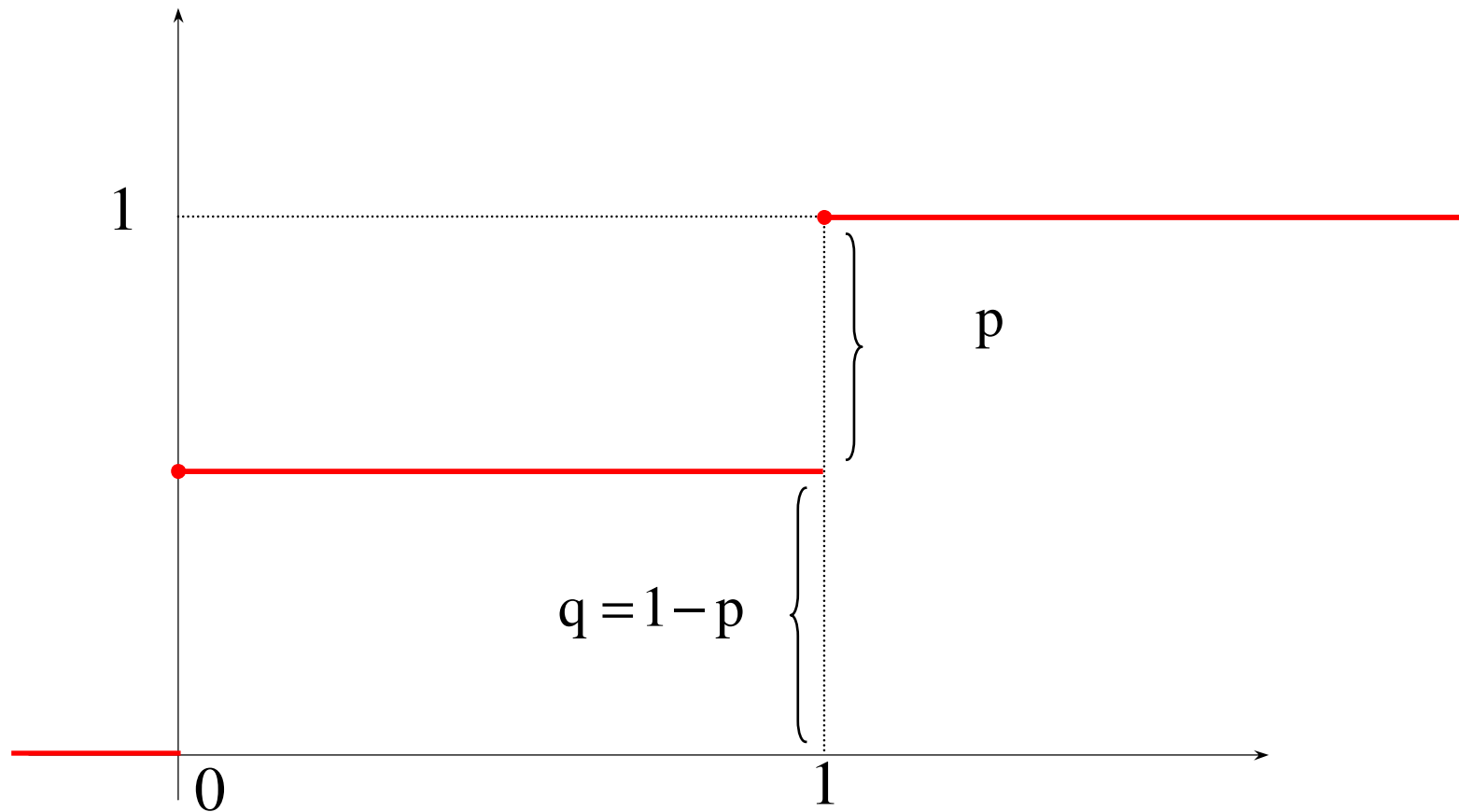


A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \\ &= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = pq \end{aligned}$$



Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja $X =$ “o número de circuitos rejeitados em um teste”.
Determine a distribuição de X .



Como se trata de um único teste, a variável X é Bernoulli com $p = 10\%$, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



Binomial



Experimento

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo $q = 1 - p$.

A VAD definida por $X =$ “número de vezes que A ocorreu nas ‘ n ’ repetições de E ” é denominada **BINOMIAL**.



Conjunto de Valores

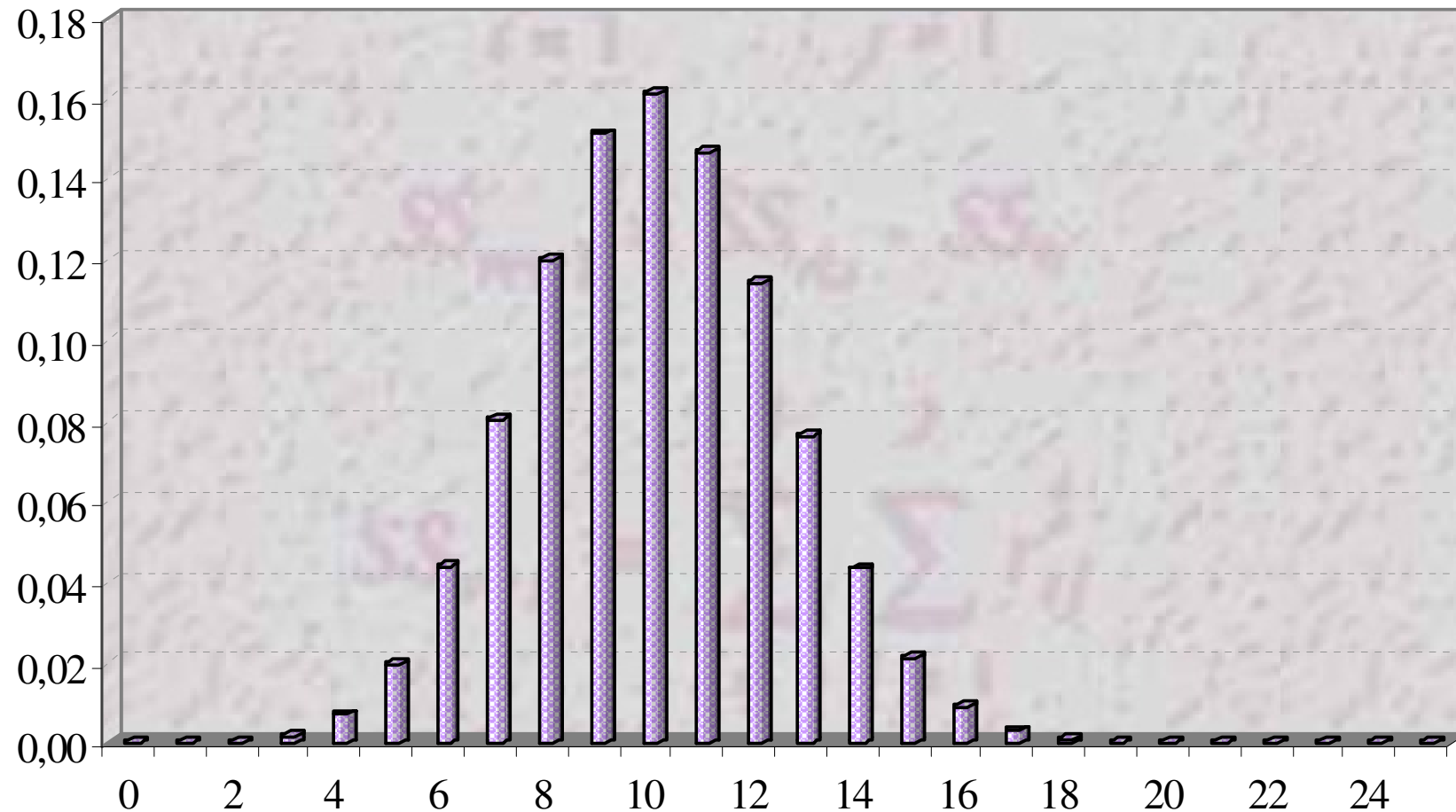
$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$



A Função de Probabilidade (fp)

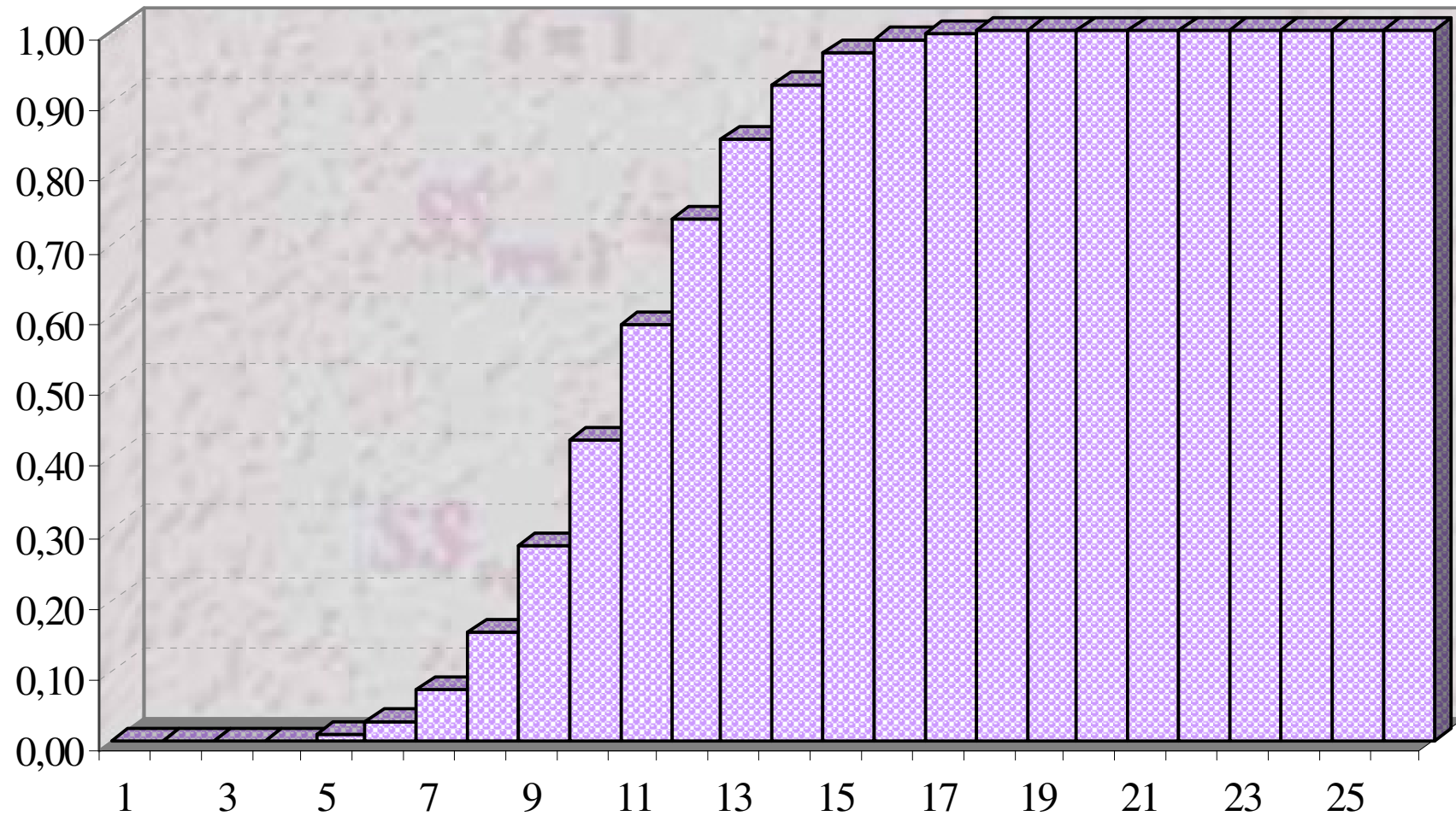


A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{se } x > n \end{cases}$$



Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x \cdot \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 + np$$



$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \\n(n-1)p^2 + np - (np)^2 &= \\= -np^2 + np &= np(1-p) = npq\end{aligned}$$

Assim:

$$E(X) = np$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$



Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja $X =$ “o número de circuitos rejeitados em 10 testes”.
Determine a distribuição de X .



Como se tratam de 10 testes a variável X é Binomial com $p = 10\%$, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x} (0,1)^x \cdot (0,9)^{10-x}$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, 10$



Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.



Tem-se:

$$n = 10 \text{ e } p = 5/100 = 0,05$$

$$\begin{aligned} f(0) = P(X = 0) &= \binom{10}{0} 0,05^0 0,95^{10} = \\ &= 59,87\% \end{aligned}$$



Tem-se:

$$n = 10 \text{ e } p = 5/100 = 5\%$$

Então:

$$\begin{aligned} f(0) = P(X=0) &= \binom{10}{0} \cdot (0,5)^0 \cdot (0,95)^{10} = \\ &= 59,87\% \end{aligned}$$



Hipergeométrica



Experimento:

A distribuição Binomial é deduzida com base em “n” repetições de um experimento de maneira independente (isto é, $p = \text{constante}$), ou retiradas com reposição de uma população finita.



Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho “N”, onde “r” apresentam uma característica “N – r” não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.



Neste caso a variável aleatória X = “número de objetos com a característica r em uma amostra de tamanho n ”, terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.



Conjunto de Valores

$$x : \text{máx}\{0, n-N+r\}, \dots, \text{mín}\{r, n\}$$

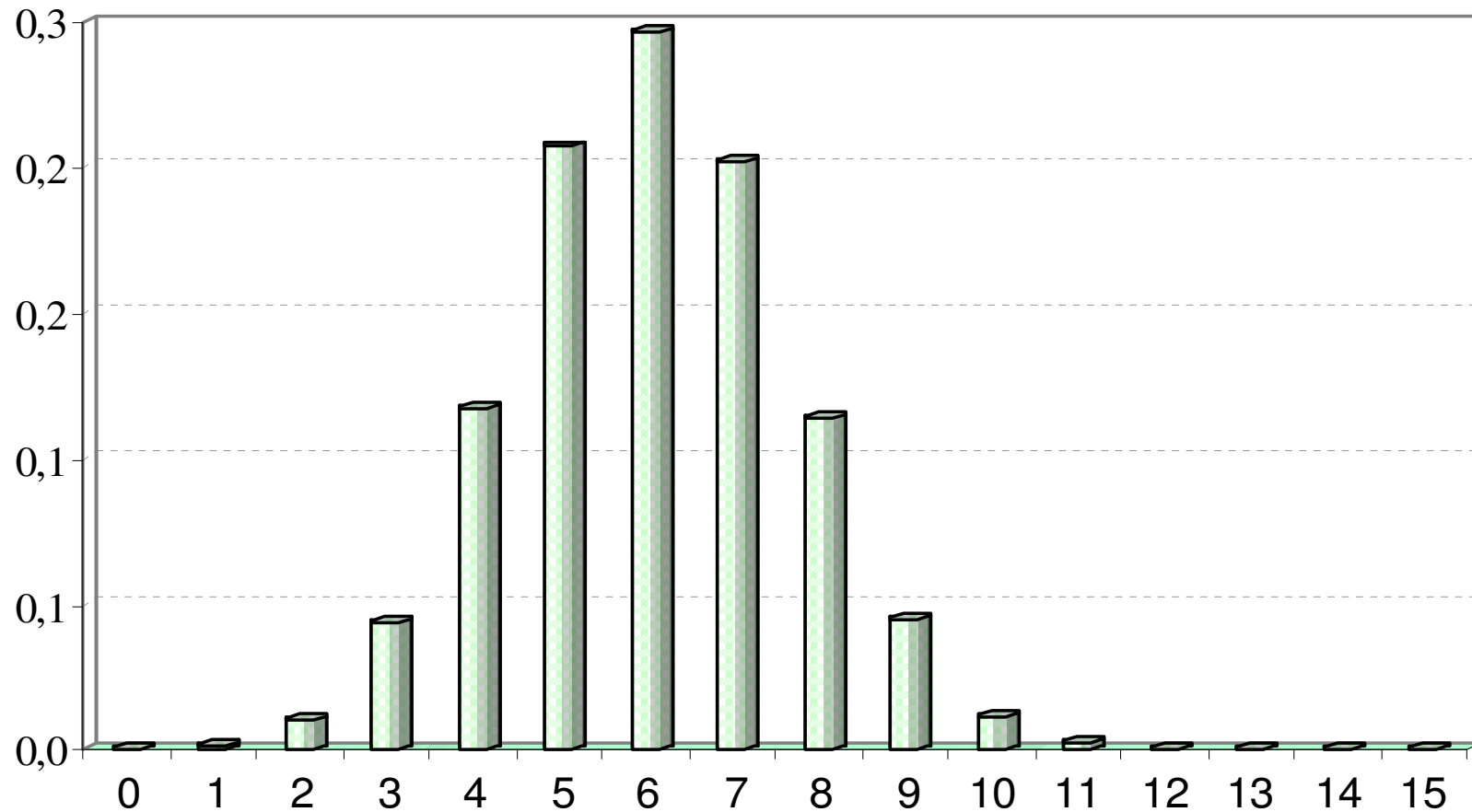
A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$



A Função de Probabilidade (fp)

$$H(20; 15; 50)$$



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < j \\ \sum_{x=j}^k \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{se } j \leq x \leq k \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

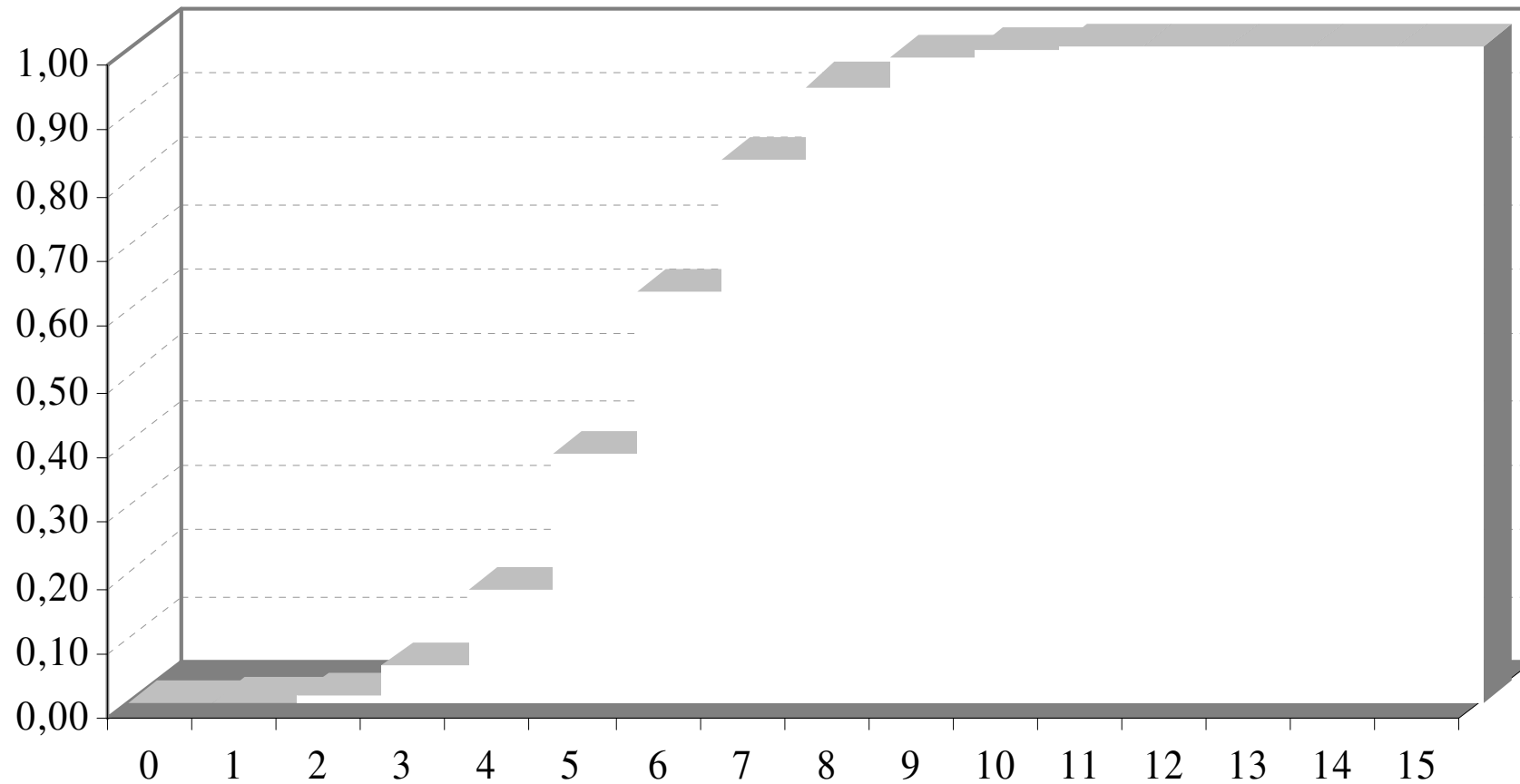
onde $j = \text{máx}\{0, n - N + r\}$

$k = \text{mín}\{r, n\}$



Função de Distribuição

$$H(20; 15; 50)$$



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{Onde } p = \frac{r}{N}$$



Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.



Pela Hipergeométrica:

$$N = 100, r = 5, n = 10$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 58,38\%$$



Pela Binomial:

$$n = 10 \text{ e } p = 5/100 = 5\%$$

$$\begin{aligned} f(0) = P(X=0) &= \binom{10}{0} \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^{10} = \\ &= 59,87\% \end{aligned}$$



Poisson



Experimento

Na Binomial a variável que interessa é o número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento). Muitas vezes, entretanto, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo, como o tempo, área, superfície, etc.



Para determinar a $f(x)$ de uma distribuição deste tipo, será suposto que:

- (i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;
- (ii) Em intervalos de mesmo tamanho as probabilidades de um mesmo número de sucessos são iguais;



(iii) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;

(iv) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de um sucesso é proporcional ao tamanho do intervalo.



Definição:

Se uma variável satisfaz estas quatro propriedades ela é dita VAD de POISSON.

Se X é uma VAD de POISSON, então a função de probabilidade de X é dada por:



A Função de Probabilidade (fp)

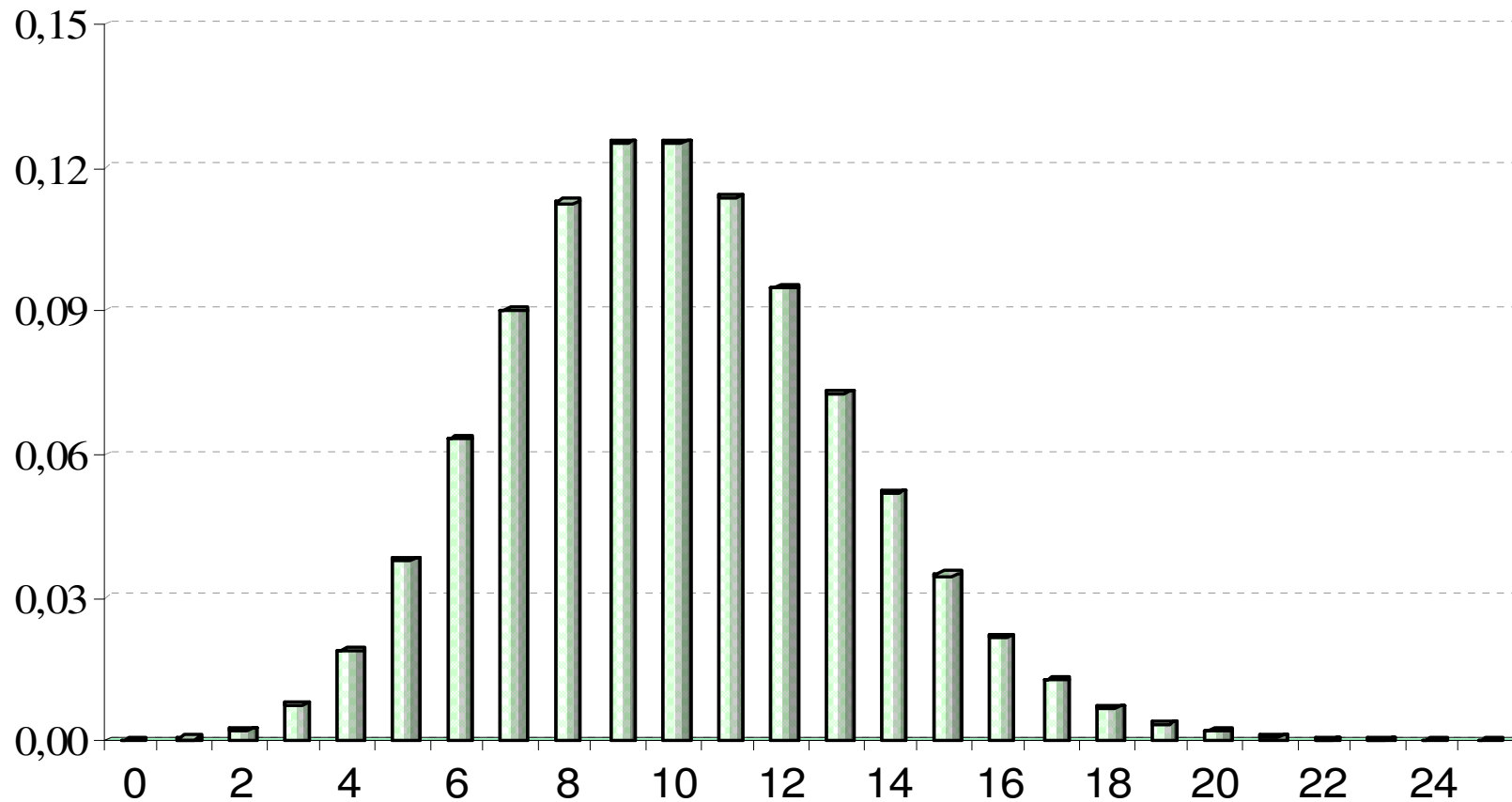
$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \dots$

“ λ ” é denominada de taxa de sucessos



A Função de Probabilidade (fp) - P(10)

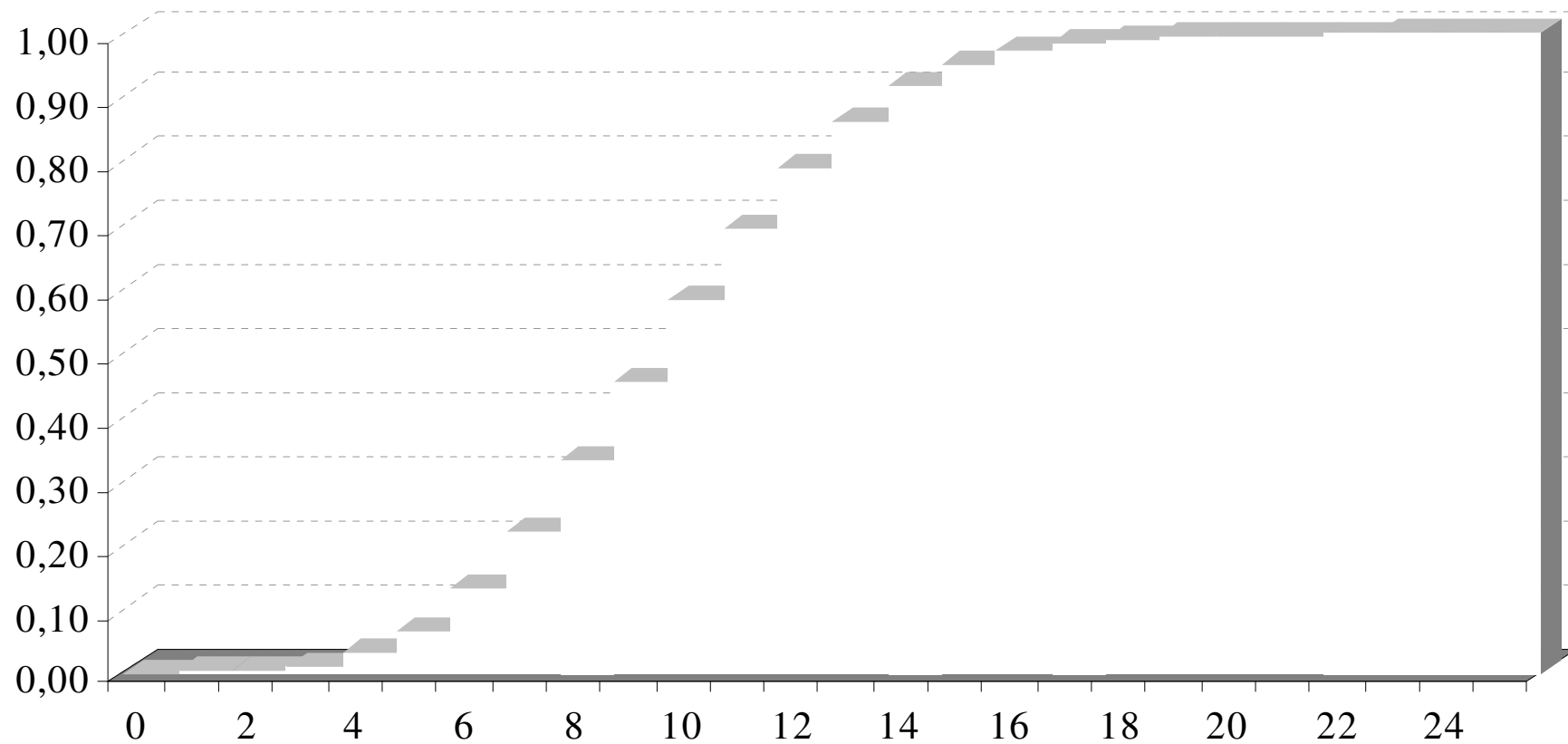


A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Função de Distribuição - P(10)



Características:

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \lambda$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$



Exemplo

O número de consultas a uma base de dados computacional é uma VAD de Poisson com $\lambda = 6$ em um intervalo de dez segundos. Qual é a probabilidade de que num intervalo de 5 segundos nenhum acesso se verifique?



A taxa de consultas é de “seis” em “dez” segundos em “cinco” segundos teremos uma taxa de $\lambda = 3$ consultas. Então:

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = \\ &= e^{-3} = 4,98\% \end{aligned}$$



Exemplo

Considerando o exemplo dado na Hipergeométrica, que foi resolvido, também, pela Binomial, é possível ainda utilizar a Poisson. Para isto deve-se fazer $\lambda = np$.



Então:

$$\lambda = 10 \cdot 0,05 = 0,5.$$

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = \frac{e^{-0,5} \cdot 0,5^0}{0!} = \\ &= e^{-0,5} = 60,65 \% \end{aligned}$$



Em resumo:

Binomial: 59,85%

Hipergeométrica: 58,38%

Poisson: 60,65%

Como pode ser visto, nesse caso, é possível utilizar três modelos para resolver um único problema.

