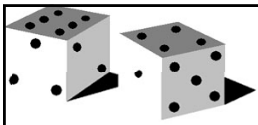


Mat02246 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Tipos de Modelos

Sistema Real → Modelo → Determinístico / Probabilístico

Modelo Determinnístico

Causas → Efeito

Exemplos

Gravitação → $F = GM_1M_2/r^2$

Aceleração clássica → $v = at$

Aceleração relativística → $v = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 t^2}{c^2}}}$

Modelo Probabilístico

$\cancel{\text{Causas}}$ → Efeito

Exemplos

Binomial → $f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} & x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & c.c. \end{cases}$

Poisson → $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!} & x \in \mathrm{N} \\ 0 & c.c. \end{cases}$

Normal → $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in \Re$

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Características

➊ Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

➋ Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;

➌ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de freqüências.

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;

E_3: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas;

E_4: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

E_5: Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;

E_6: Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;

E_7: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Espaço Amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplos

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{$ cccc, ccck, cckc, ckcc,
kccc, cckk, kkcc, ckkc,
kcck, ckck, kckc, kkkc,
kkck, kckk, ckkk, kkkk $\}$

$S_4 = \{ t \in R \,/\, t \geq 0 \}$

$S_5 = \{1, 2, 3, ...\}$

$S_6 = \{♦, ♠, ♣, ♥\}$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$S_7 = \{$ (1, 1), (1, 2),(1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) $\}$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Eventos

Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Seja S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } um espaço amostra.

Então são eventos:

A = { 1, 3, 5} B = { 6 }

C = { 4, 5, 6} D = ∅ E = S

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Ocorrência de um evento

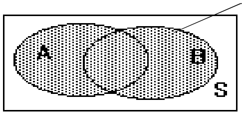
Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

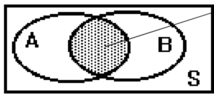
A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.



$A \cup B$

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

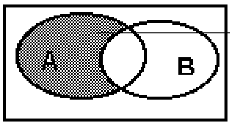
A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.



$A \cap B$

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

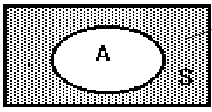
A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.



A - B

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

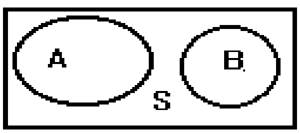
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$A' = A^C = \overline{A}$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.

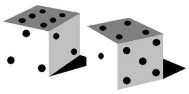


Conceitos de Probilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQÜENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Exemplo

Qual a probabilidade de ganhar na Loto Fácil?

Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$

P(Loto Fácil) =

$$= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0{,}000031\%$$

Freqüência Relativa

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta “FACE SEIS” 18 vezes.

Então, a freqüência relativa de “FACE SEIS” é:

$fr_6 =$

$$= \frac{\text{número de vezes que "f\_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}}$$

$$= \frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\%$$

Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(AUB) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \varnothing$

Conseqüências dos Axiomas (Teoremas)

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Probabilidade Condicionada

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.

Suponha que desta urna são retiradas "duas" fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

A = { a primeira ficha é branca}

B = { a segunda ficha é branca}

Então:

$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$

$P(B) = ?/49$

Neste caso, não se pode avaliar P(B), pois para isto é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$P(B|A) = 9/49 = 0,1837 = 18,37\%$

Observe a notação

Esta representação é lida:

P de B dado A;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A.

Definição:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Mas:

Se $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ então:

$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$

Também:

Se $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$ então:

$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$

Assim:

$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A|B).P(B)$

Esse resultado é conhecido como:

Teorema da multiplicação

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Definição:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Observação:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$A_1, A_2, ..., A_n$

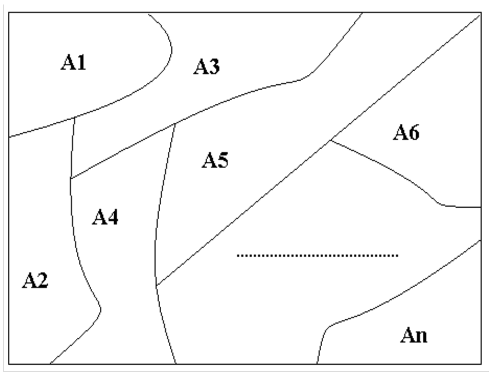
eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$

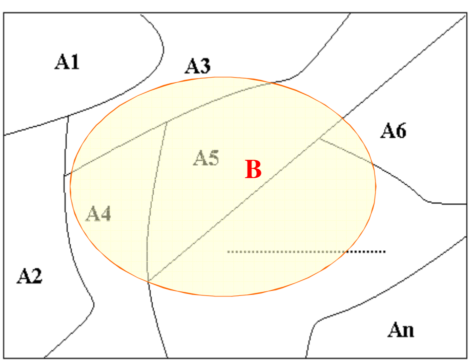
(3) $P(A_i) > 0$, para todo i

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Teorema da probabilidade total

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

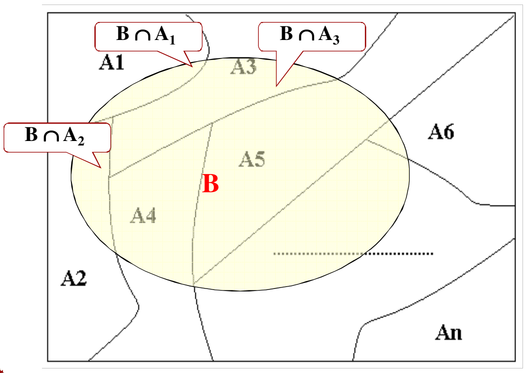


Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Assim: $P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$

Exemplo

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina “A” participa com 20% da produção, a “B” com 30% e a “C” com 50%.

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad$ $P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad$ $P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad$ $P(D|C) = 1\%$

$$P(D) = \sum P(A_i).P(D|A_i)$$

Então:

$P(D) =$

$= P(A).P(D|A) + P(B).P(D|B) + P(C).P(D|C) =$

$= 0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01 =$

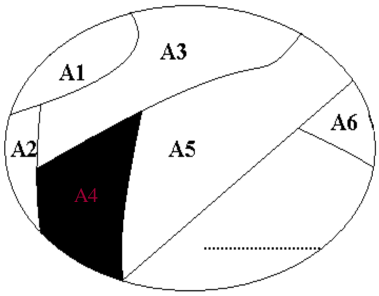
$= 0,01 + 0,009 + 0,005 =$

$= 0,024 = 2,40\ \%$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Teorema de Bayes

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos "A_i" (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer "B".

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$P(A_i |B) =$

$= P(A_i \cap B)/ P(B) =$

$= P(A_i).P(B|A_i)/ P(B)$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Na expressão:

$P(A_i|B) = P(A_i).P(B|A_i) / P(B)$

o valor de $P(B)$ (denominador) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\qquad P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\qquad P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\qquad P(D|C) = 1\%$

$P(D) = 2{,}40\%$

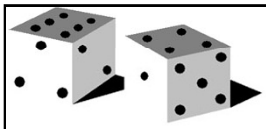
Então:

$$P(A\,|\,D) =$$

$$= \frac{P(A).P(D\,|\,A)}{P(A).P(D\,|\,A) + P(B).P(D\,|\,B) + P(C).P(D\,|\,C)} =$$

$$= \frac{0{,}20.0{,}05}{0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01} =$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}024} = 41{,}67\%$$



Mat02246 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@mat.ufrgs.br

http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for infinito não enumerável então a variável é dita contínua.

A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada $x \in X(S)$ um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x).dx = 1$$

A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares (x, f(x)) é denominada de distribuição de probabilidade da VAC X.

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de "c" para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de "c", devemos igualar a área total a um, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = 1$$

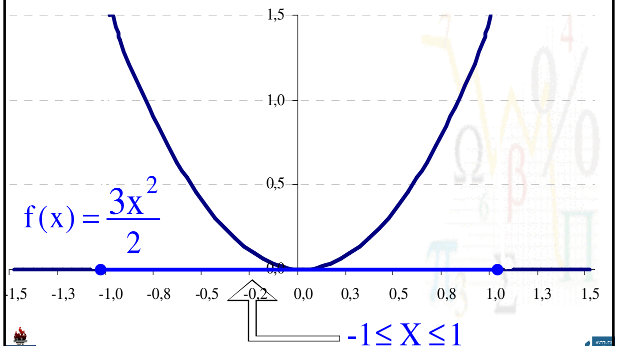
Tem-se:

$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = c\int_{-1}^{1} x^2 dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

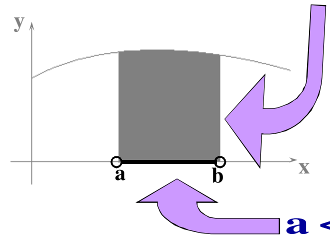
$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Representação Gráfica



Cálculo da Probabilidade

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



$\mathbf{a < X < b}$

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números "a" e "b" é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Observações

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5].

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2}[(0{,}5)^3 - (-0{,}5)^3] = 12{,}50\%$$

VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int xf(x)dx$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx =$$
$$= \int x^2 f(x)dx - \left(\int xf(x)dx\right)^2 =$$
$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} =$$
$$= \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$

A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "x".

Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3u^2}{2} du & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos determinar o valor da integral em “u”:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2} \int_{-1}^{x} u^2 du =$$

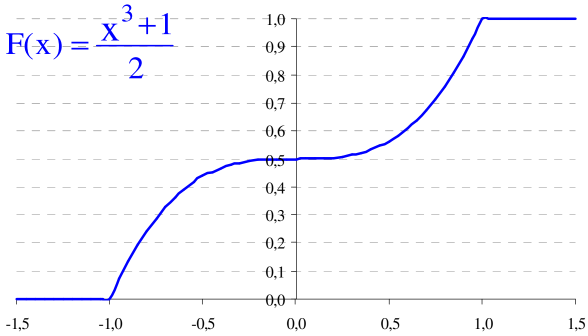
$$= \frac{3}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2} [u^3]_{-1}^{x} = \frac{x^3 + 1}{2}$$

Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \frac{x^3 + 1}{2} & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Representação Gráfica

$$F(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$$



Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \le x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Modelos Probabilísticos Contínuos

- Normal
- t (Student)
- χ^2 (Qui-Quadrado)
- F (Fisher/Snedecor)