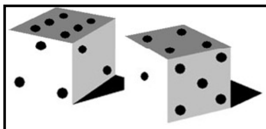


# Mat02246 - Probabilidade


Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@mat.ufrgs.br

http://www.mat.ufrgs.br/~viali/


# Variável Aleatória Contínua



Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.



## A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada $\mathbf{x \in X(S)}$ um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x).dx = 1$$



## A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares **(x, f(x))** é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X.



## Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de “c” para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de “c”, devemos igualar a área total a **um**, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = 1$$



Tem-se:

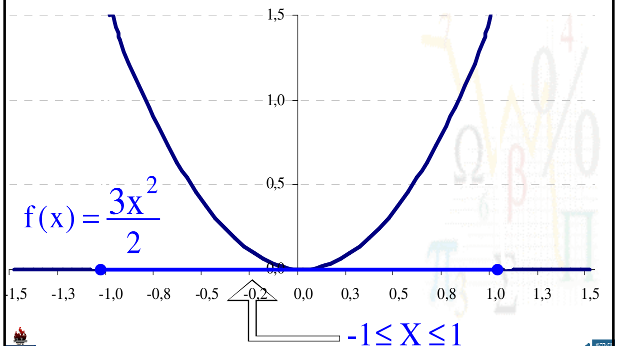
$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = c\int_{-1}^{1} x^2 dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$



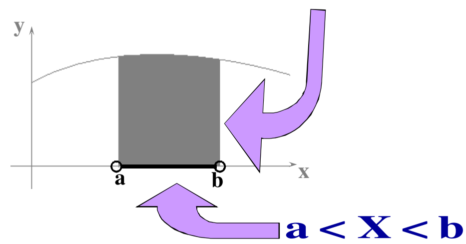
## Representação Gráfica






## Cálculo da Probabilidade

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$






$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.



## Observações

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

## Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5].

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(-0,5 < X < 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2}[(0,5)^3 - (-0,5)^3] = 12,50\%$$



## VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int xf(x)dx$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \left(\int xf(x)dx\right)^2 =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$



(iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$



## A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "**x**".



## Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3u^2}{2}du & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



Vamos determinar o valor da integral em "u":

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{3u^2}{2}du=\frac{3}{2}\int_{-1}^{x}u^2du=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x}=\frac{1}{2}[u^3]_{-1}^{x}=\frac{x^3+1}{2}$$

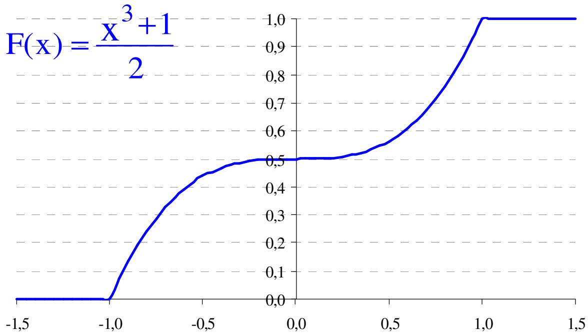


Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \frac{x^3+1}{2} & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



## Representação Gráfica






## Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.



Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \le x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

# Modelos Probabilísticos Contínuos



- Normal
- t (Student)
- $\chi^2$ (Qui-Quadrado)
- F (Fisher/Snedecor)



# A Distribuição Normal



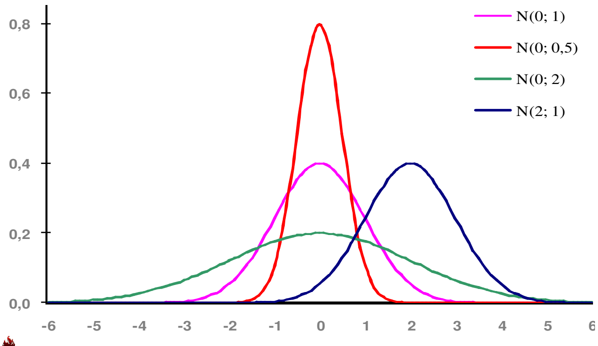
Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \Re$$

$$\text{com } -\infty < \mu < \infty \quad \text{e} \quad \sigma > 0$$



## Representação Gráfica






## Cálculo de Probabilidades

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável através do TFC, isto é, não existe F(x) tal que F'(x) = f(x).

## Solução

Utilizar integração numérica. Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).



## A Normal Padrão

A curva escolhida é a N(0, 1), isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Se X é uma N($\mu$, $\sigma$), então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Será uma N(0; 1)

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

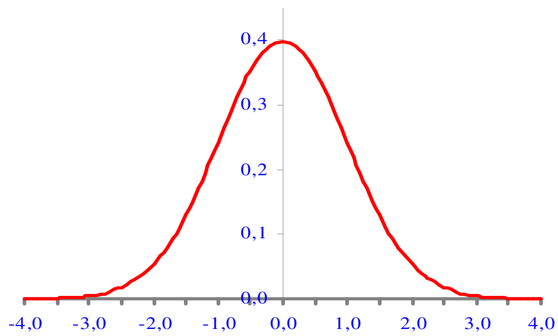
A fdp da variável Z é dada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \Re$$

uma vez que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## A Distribuição N(0; 1)




Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Tabela

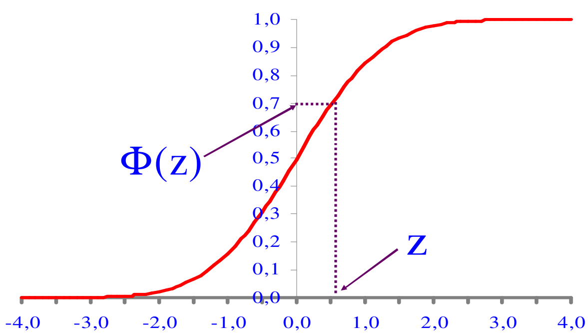
O que é tabelado é a FDA da variável Z, isto é:

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(z)$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## A FDA da N(0; 1)




Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Uso da Tabela

Área à esquerda (abaixo) de "z"

$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \text{Leitura direta}$

Área à direita (acima) de "z"

$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$

Área entre dois valores de "z"

$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$



A tabela é construída como uma matriz. As linhas fornecem a unidade ou unidade mais décimo e as colunas fornecem os centésimos.

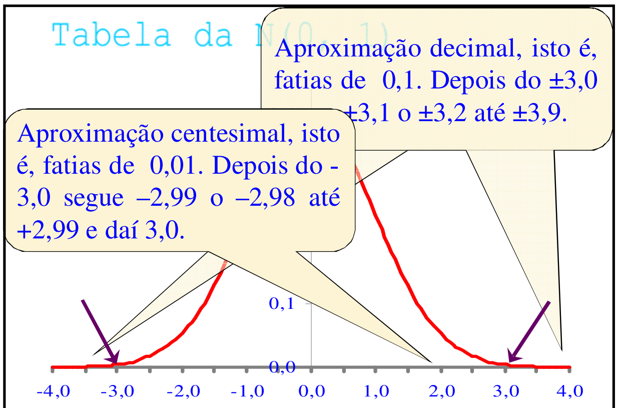
Assim para ler, por exemplo, -0,15 deve-se procurar na linha do –0,1 + coluna do 5 (sexta coluna). A primeira é a do "0" (zero).



A aproximação é centesimal (2 casas após a vírgula) exceto na linha do –3 e do +3, que estão destacadas, onde a aproximação é, em virtude da pouca área, **decimal.** Observe que está escrito –3 e não –3,0!



## Tabela da N(0, 1)






| z | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| -3 | 0,0013 | [illegible] | 0,0007 | 0,0005 |
| -2,9 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0,0017 |
| -2,8 | [illegible] | [illegible] | 0,0024 | 0,0023 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 |
| -2,6 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0,0043 |
| -2,5 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 0,0057 |
| -2,4 | 0,0082 | [illegible] | 0,0078 | 0,0075 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | [illegible] | [illegible] |
| -2,2 | 0,0139 | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| -2,1 | 0,0179 | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 |

**$P(Z < -3,3) = \Phi(-3,3)$**

**$P(Z < -2,53) = \Phi(-2,53)$**

**$P(Z < -2,00) = \Phi(-2,00)$**



## Exemplo

Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

**(a)** $P(X \leq 40)$

**(b)** $P(X > 65)$

**(c)** $P(45 < X < 62)$

**(a)** $P(X \le 40)$

$$P(X \le 40) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{40-50}{8}) =$$

$$= P(Z \le -1{,}25) = 10{,}56\%$$



**(b)** $P(X > 65)$

$$P(X > 65) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{65-50}{8}) =$$

$$= P(Z > 1{,}88) = 1 - P(Z < 1{,}88) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}88) = \Phi(-1{,}88) = 3{,}01\%$$



**(c)** $P(45 < X < 62)$

$$P(45 < X < 62) =$$

$$= P(\frac{45-50}{8} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{62-50}{8}) =$$

$$= P(-0{,}62 < Z < 1{,}50) =$$

$$= \Phi(1{,}50) - \Phi(-0{,}62) =$$

$$= 93{,}32\% - 27{,}67\% = 65{,}65\%$$



# A Função Inversa



Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

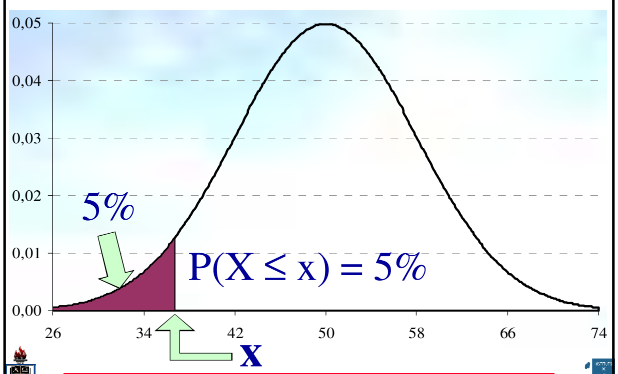
**(a)** $P(X \le x) = 5\%$

**(b)** $P(X > x) = 1\%$



Para resolver este tipo de exercício é preciso utilizar a função inversa, isto pode ser feito direto na tabela. Só que agora devemos procurar uma probabilidade (corpo da tabela) e obter um valor de “z” (lateral da tabela).

## Graficamente:






Em **(a)** temos $P(X \le x) = 5\%$

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-50}{8}\right) =$$

$$= P(Z \le z) = \Phi(z) = 5\%$$

onde $z = \dfrac{x-50}{8}$



Se $\Phi(z) = 5\%$, então

$$\Phi^{-1}[\Phi(z)] = \Phi^{-1}(5\%)$$

$$z = \Phi^{-1}(0{,}05)$$

Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de $5\% = 0{,}05$, tem-se:



| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | 0,0013 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0003 | 0,0002 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | [illegible] | [illegible] |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | [illegible] | 0,0125 | 0,0122 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | [illegible] | 0,0162 | 0,0158 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | [illegible] | 0,0207 | 0,0202 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 |

**z = -1,64**

**z = -1,65**



Como os dois valores estão a mesma distância, isto é, apresentam o mesmo erro (0,0005), pega-se a média entre eles.



Assim

$$z = \frac{1{,}64 + 1{,}65}{2} = 1{,}645$$

$$Como \quad z = \frac{x-50}{8}, \quad tem-se:$$

$$-1{,}645 = z = \frac{x-50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 50 - 1{,}645.8 = 36{,}84$$

Em **(b)** temos $P(X > x) = 1\%$

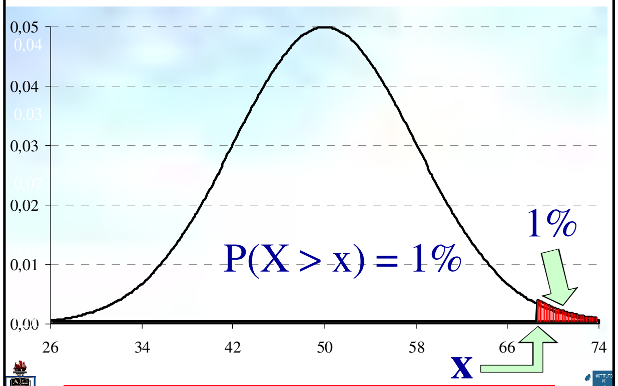
$$P(X > x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-50}{8}\right) =$$

$$= P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = 1\% = 0{,}01$$

$$\text{Mas} \quad 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

$$\text{Logo} - z = \Phi^{-1}(0{,}01)$$








Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de $1\% = 0{,}01$, tem-se: z = -2,33

Conforme pode ser visto na próxima lâmina!



| z | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **-3** | 0,0013 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0005 |
| **-2,9** | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 |
| **-2,8** | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 |
| **-2,7** | 0,0035 | [illegible] | [illegible] | 0,0032 |
| **-2,6** | 0,0047 | [illegible] | [illegible] | 0,0043 |
| **-2,5** | 0,0062 | 0,0060 | [illegible] | 0,0057 |
| **-2,4** | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 |
| **-2,3** | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 |
| **-2,2** | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 |
| **-2,1** | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 |
| **-2,0** | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 |

**z = -2,33**



Como

$$-z = \Phi^{-1}(0{,}01), \ \text{tem-se:}$$

$$-(-2{,}33) = \frac{x-50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 2{,}33 . 8 + 50 = 68{,}64$$



Para se definir as **Distribuições** t, $\chi^2$ e F é necessário definir inicialmente a **Função** Gama.

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\,dx, \quad \text{para} \quad k > 0$$

A função Gama é recursiva, isto é:

$\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k)$

É a equação funcional da função Gama.

Se n é um inteiro positivo, então:

$\Gamma(n) = (n - 1)!$



E uma vez que :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

A função gama pode ser considerada uma generalização do Fatorial.



Verificar, ainda, que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$



# A Distribuição t (Student)



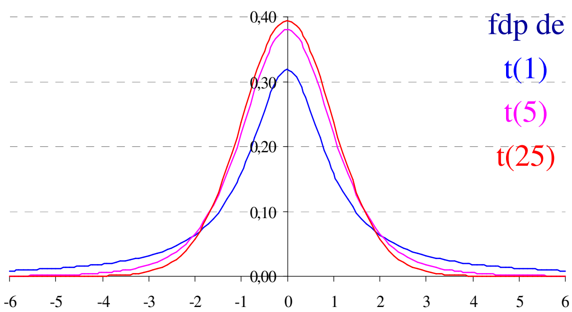
Uma variável aleatória X tem uma distribuição **"t"** ou de **Student** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}}{\sqrt{\pi\upsilon}.\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}$$

para $x \in \Re$



## Representação Gráfica



## Caracterização

### Expectância ou Valor esperado

$\mu = E(X) = 0$

### Variância

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2}$$

O valor $\upsilon$ é denominado de "Grau de liberdade"



## Tabelas

O que é tabelado é a função inversa (percentis), em relação a área à direita (unilateral) de cada curva (uma para cada linha), ou a soma das caudas (bilateral), isto é, a tabela retorna um valor "t" tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (unilateral) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$.



As duas opções podem ser colocadas em uma mesma tabela. Pode-se ler uma área ($\alpha$) de cima para baixo e se ter um valor unilateral ($P(T \geq t) = \alpha$) ou ler a área ($\alpha$) de baixo para cima e se ter um valor "t" tal que $P(T \geq t) = \alpha/2$.



| | 0,200 | 0,100 | 0,050 | 0,040 | 0,030 | 0,020 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 15,894 | 21,205 | 31,821 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 4,849 | 5,643 | 6,965 |
| 3 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | ,896 | 4,541 |
| 4 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | ,98 | 3,747 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | [illegible] | 2,757 | 3,003 | 3,365 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 7 | 2,612 | 2,829 | 3,143 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 65 | 2,517 | 2,715 | 2,998 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2 306 | 2,449 | 2,634 | 2,896 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,398 | 2,574 | 2,821 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,359 | 2,527 | 2,764 |

$P(|T_9| \geq 2{,}262) = 5\%$



| | 0,200 | 0,100 | 0,050 | 0,040 | 0,030 | 0,020 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 15,894 | 21,205 | 31,821 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 4,849 | 5,643 | 6,965 |
| 3 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 06 | 4,541 |
| 4 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | ,98 | 3,747 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | [illegible] | 2,757 | 3,003 | 3,365 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 7 | 2,612 | 2,829 | 3,143 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 65 | 2,517 | 2,715 | 2,998 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2 306 | 2,449 | 2,634 | 2,896 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,398 | 2,574 | 2,821 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,359 | 2,527 | 2,764 |

$P(T_9 < -2{,}262) = 2{,}5\%$

ou

$P(T_9 > 2{,}262) = 2{,}5\%$



# A Distribuição Qui-Quadrado

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **Qui-Quadrado** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\upsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$



## Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$E(X) = \upsilon$$

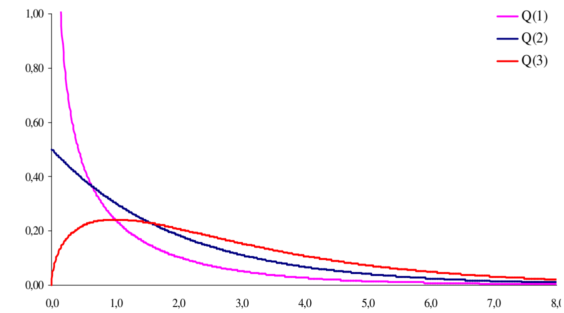
Variância

$$Var(X) = 2\upsilon$$

O valor $\upsilon$ é denominado de "Grau de liberdade"



## Representação Gráfica






## Tabelas

O que é tabelado é a função inversa, em relação a área à direita de cada curva (uma para cada linha), isto é, dado um valor de área na cauda direita ($\alpha$), a tabela retorna um valor "x" tal que $P(\chi^2 \ge x) = \alpha$.



| | **0,995** | **0,990** | **0,975** | **0,950** | **0,900** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,004 | 0,016 |
| **2** | 0,010 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,211 |
| **3** | 0,072 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 |
| **4** | 0,207 | 0,297 | 0,484 | [illegible] | 1,064 |
| **5** | 0,412 | 0,554 | [illegible] | [illegible] | 1,610 |
| **6** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 2,204 |
| **7** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 2,833 |
| **8** | 1,344 | 1,647 | 2,180 | 2,733 | 3,490 |
| **9** | 1,735 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 4,168 |
| **10** | 2,156 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,865 |

$P[\chi^2_{(2)} \ge 0,211] = 90\%$



| | **0,100** | **0,050** | **0,025** | **0,010** | **0,005** |
|---|---|---|---|---|---|
| **41** | 52,949 | 56,942 | 60,561 | 64,950 | 68,053 |
| **42** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **43** | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **44** | 56,369 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 71,892 |
| **45** | 57,505 | 61,656 | [illegible] | [illegible] | 73,166 |
| **46** | 58,641 | 62,830 | [illegible] | [illegible] | 74,437 |
| **47** | 59,774 | 64,001 | 67,821 | [illegible] | 75,704 |
| **48** | 60,907 | 65,171 | 69,023 | [illegible] | 76,969 |
| **49** | 62,038 | 66,339 | 70,222 | 74,919 | 78,231 |
| **50** | 63,167 | 67,505 | 71,420 | 76,154 | 79,490 |

$P[\chi^2_{(49)} \ge 74,919] = 1\%$

# A Distribuição F (de Snedecor)

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Uma variável aleatória X tem uma distribuição "F" ou de Snedecor se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Caracterização

### Expectância ou Valor esperado

$$E(X) = \frac{m}{m-2}$$

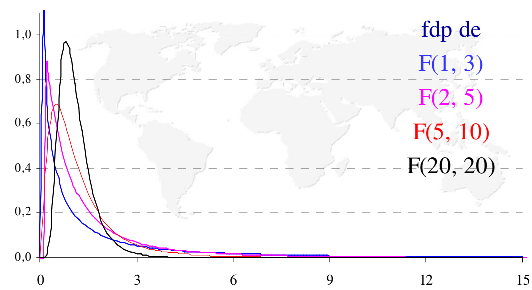
**m** é o grau de liberdade do numerador e **n** do denominador

### Variância

$$Var(X) = \frac{2(m+n-2)\,m^2}{m(n-2)(n-4)}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Representação Gráfica




Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Tabelas

O que é tabelado é a percentil 95% ou 99% - área à direita de cada curva (uma para cada par de valores – numerador, denominador) igual a 5% e 1%, isto é, "x" tal que $P[F(m, n) \geq x] = 5\%$ ou $P[F(m, n) \geq x] = 1\%$.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 |
| 2 | 18,51 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 19,35 |
| 3 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 4 | 7,71 | 6,94 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 6,16 | 6,09 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | [illegible] | [illegible] | 4,95 | 4,88 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | [illegible] | 4,28 | 4,21 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 |

$P[F(5,7) \geq 3,97] = 5\%$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052,18 | 4999,34 | 5403,53 | [illegible] | [illegible] | 5858,95 | 5928,33 |
| 2 | 98,50 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 3 | 34,12 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 14,98 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | [illegible] | 10,67 | 10,46 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | [illegible] | 8,47 | 8,26 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 |

$P[F(5, 7) \geq 7,46] = 1\%$