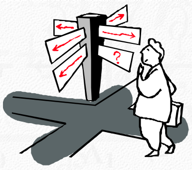


Testes de Hipóteses 1

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www.ufrgs.br/~viali/
viali@mat.ufrgs.br

Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).

Tipos de Testes de Hipóteses

Testes

Paramétricos

Não-paramétricos

Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.

Alguns motivos para o seu uso

- São menos exigentes do que os paramétricos;
- As probabilidades na maioria dos testes são exatas;
- Independem da forma da população da qual a amostra foi obtida;

Alguns motivos para o seu uso

- Aplicação mais fácil;
- São úteis nos casos em que é difícil estabelecer uma escala de valores quantitativos para os dados.
- São mais eficientes do que os paramétricos, quando os dados não são normais.

Algumas restrições ao seu uso

- Em geral não levam em consideração a magnitude dos dados. Em muitos casos isso se traduz num desperdício de informações;
- Quando todas as exigências do modelo estatístico estão satisfeitas, o teste paramétrico tem mais poder;

Algumas restrições ao seu uso

- Em, geral, não permitem testar interações. Isto restringe a sua aplicação aos modelos mais simples;
- A obtenção, utilização e interpretação das distribuições de probabilidade, são em geral, mais trabalhosas.

Testes Paramétricos

Envolvem parâmetros populacionais.

Um parâmetro é qualquer medida que descreve uma população.

Os principais parâmetros são:

μ (a média)

σ^2 (a variância)

σ (o desvio padrão)

π (a proporção)

Etapas dos testes paramétricos de hipóteses

(1) Formular a hipótese nula (H_0)

H_0: $\theta = \theta_0$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.

(2) Formular a hipótese alternativa (H_1)

(Testes simples)

H_1: $\theta = \theta_1$

(Testes compostos)

H_1: $\theta > \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\theta < \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\theta \neq \theta_0$ (teste bilateral/bicaudal).

(3) Definir um valor crítico (α)

- Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).
- Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que ser quer provar.

(4) Calcular a estatística teste

- A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;
- A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.

(5) Tomar uma decisão

- A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;
- Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p-value) ao invés do valor crítico.

(6)
Formular uma conclusão

- Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;

- Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.

Em resumo

População: Valor do parâmetro

Questão a ser feita

Decisão a ser tomada

Qual é a diferença entre o valor observado da estatística e o valor hipotético da parâmetro?

Diferença pequena → Não rejeitar a hipótese

Diferença grande → Rejeitar a hipótese

Amostra: Valor da estatística.

C o n c e i t o s
B á s i c o s

E x e m p l o

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (M_1) é equilibrada, isto é, P(Cara) = P(Coroa) = 50%, enquanto que a outra (M_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, P(Cara) = 80% enquanto que P(Coroa) = 20%.

Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

X = número de caras,

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:

H i p ó t e s e s

H_0: A moeda lançada é a equilibrada (M_1) ($p = 50\%$)

H_1: A moeda lançada é a viciada (M_2) ($p = 80\%$)

p = proporção de caras.

D e c i s ã o

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.

A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.

A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5, da variável X = número de caras, em uma amostra de $n = 5$, lançamentos de cada uma das moedas.

Sob H_0 $X \sim B(5; 0{,}5)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0{,}5^x 0{,}5^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x} 0{,}5^5 = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x} \Big/ 32$$

Sob H_1 $X \sim B(5; 0{,}8)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0{,}2^x 0{,}8^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x \Big/ 3125$$

Distribuições amostrais (n = 5)

x	$P(X = x)$ sob H_0	$P(X = x)$ sob H_1
0	1/32 → 3,125%	1/3125 → 0,032%
1	5/32 → 15,625%	20/3125 → 0,640%
2	10/32 → 31,250%	160/3125 → 5,120%
3	10/32 → 31,250%	640/3125 → 20,480%
4	5/32 → 15,625%	1280/3125 → 40,960%
5	1/32 → 3,125%	1024/3125 → 32,768%
Total	1 → 100%	1 → 100%

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar H_0 e como conseqüência, rejeitar ou aceitar H_1, é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar H_0

Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0, se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.

Assim o conjunto de valores que levará a rejeição da hipótese nula será denominado de região crítica (RC) e, neste caso, este conjunto é igual a:

$RC = \{ 4, 5 \}$

Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (RA) e, neste caso, este conjunto vale:

$RA = \{0, 1, 2, 3\}$

Erro do Tipo I ou Nível de Significância do Teste

Então se H_0 for rejeitada porque X assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar cometendo um erro.

A probabilidade deste erro é igual a probabilidade de ocorrência destes valores sob H_0, isto é:

α = P(Erro do Tipo I) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

$= P(X = 4 \text{ ou } 5 / p = 0{,}50) =$

$= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18{,}75\% =$

= Nível de significância do teste.

Erro do Tipo II

O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de **erro do tipo II**.

Erro do Tipo II

β = P(Erro do Tipo II) =

= P(Aceitar H_0 / H_0 é falsa) =

P(X = 0, 1 , 2 ou 3 / p = 80%) =

= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 =

= 821/3125 = 26,27%

β = (1+20+160+640)/3125
821/3125= 26,27%

x	P(X=	
0	1/32 ⟶ 3,125%	1/3125 2%
1	5/32 ⟶15,625%	20/3125 0,640%
2	10/32 ⟶ 31,250%	160/3125 ⟶ 5,120%
3	10/32⟶ 31,250%	640/3125 ⟶ 20,480%
4	5/32⟶ 15,625%	1280/3125 ⟶ 40,960%
5	1/32⟶ 3,1	1024/3125 ⟶ 32,768%
Total	1 ⟶ 10	0%

α = 5/32 + 1/32
6/32= 18,75%

Em Resumo

Realidade	Decisão	
	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 é verdadeira	**Decisão correta** 1 - α = P(Aceitar H_0 / H_0 é verdadeira)	**Erro do Tipo I** α = P(Cometer Erro do tipo I) = P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) = Nível de significância do teste
H_0 é falsa	**Erro do Tipo II** β = P(Cometer Erro do tipo II) = P(Aceitar H_0 / H_0 é falsa) = P(Aceitar H_0 / H_1 é verdadeira)	**Decisão correta** 1 - β = P(Rejeitar H_0 / H_0 é falsa) = Poder do teste.

Exemplo 1

Uma urna contém quatro fichas das quais θ são azuis e $4 - \theta$ são vermelhas. Para testar a hipótese nula de que $\theta = 2$ contra a alternativa de $\theta \neq 2$, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

Região De Não Rejeição

$S = \{VV, AA, AV, VA\}$

Região Crítica

Sob H_0: $\theta = 2$

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a **probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.**

Sob H_0: $\theta = 2$

α = P(Erro do Tipo I) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

$= P(VV, AA / \theta = 2) =$

$$= \frac{2}{4}.\frac{1}{3} + \frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a $P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa})$

MAS

$1 - \beta = P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa}) =$

$= P(VV, AA / H_1 \text{ é verdadeira}) =$

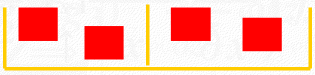
$= P(VV, AA / \theta \neq 2)$.

Assim devemos analisar quatro situações:

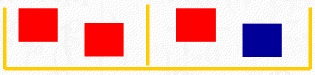
$\theta = 0$, $\theta = 1$, $\theta = 3$ e $\theta = 4$

ISTO É:

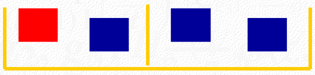
$\theta = 0$



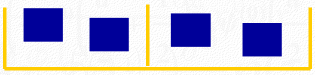
$\theta = 1$



$\theta = 3$

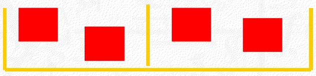


$\theta = 4$



$\theta = 0$

Neste caso



Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) =$$

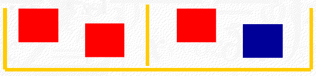
$$= P(VV,\ AA / \theta = 0) =$$

$$= \frac{4}{4}.\frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$\theta = 1$

Neste caso



Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) =$$

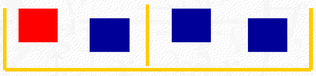
$$= P(VV,\ AA / \theta = 1) =$$

$$= \frac{3}{4}.\frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$\theta = 3$

Neste caso



Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) =$$

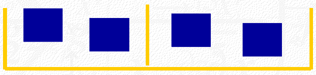
$$= P(VV,\ AA / \theta = 3) =$$

$$= 0 + \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$\theta = 4$

Neste caso



Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) =$$

$$= P(VV,\ AA / \theta = 0) =$$

$$= 0 + \frac{4}{4}.\frac{3}{3} = 1 = 100\%$$

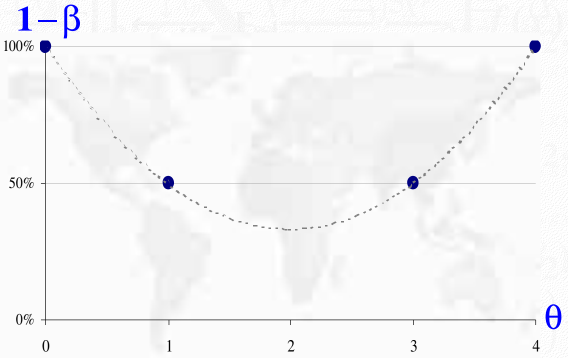
Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Em Resumo, tem-se:

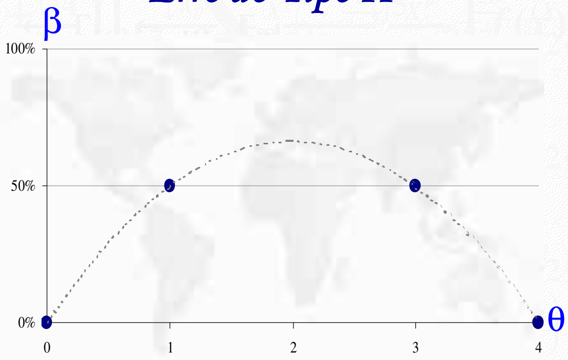
θ	β	$1-\beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Poder do Teste



Erro do Tipo II



Exemplo 2

Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$ Rejeita-se a hipótese nula se X = "número de faces um for maior ou igual a quatro". Determinar o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

Região De Rejeição (Crítica)

$$S = \{\underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3}_{\text{Região de Não Rejeição}},\ \overbrace{4,\ 5,\ 6}^{\text{Região de Rejeição (Crítica)}}\}$$

Região de Não Rejeição

H_0: $p = 1/6$

H_0: $p > 1/6$

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a **probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.**

Sob H_0: $p = 1/6$

α = P(Erro do Tipo I) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

= $P(X \geq 4 / p = 1/6)$ =

$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15.25}{6^6} + \frac{6.5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0,87\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é $P(X \geq 4 / H_0$ é falsa)

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

MAS

$1-\beta = P(X \geq 4 / H_0$ é falsa) =

= $P(X \geq 4 / H_1$ é verdadeira) =

= $P(X \geq 4 / p > 1/6)$.

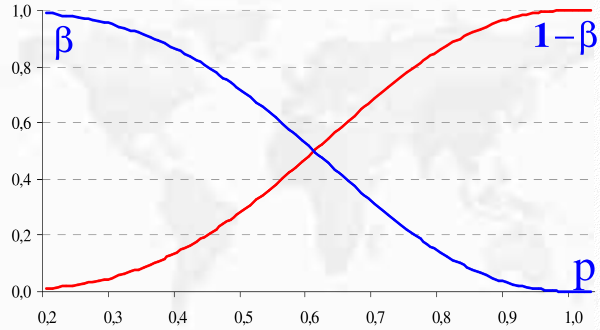
Neste caso, o poder do teste é uma função de p. Vamos avaliar esta função para alguns valores de "p".

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Poder do teste para p > 1/6

p	1-β	p	1-β	p	1-β
0,20	1,70	0,55	44,15	0,90	98,41
0,25	3,76	0,60	54,43	0,95	99,78
0,30	7,05	0,65	64,71	1,00	100,00
0,35	11,74	0,70	74,43		
0,40	17,92	0,75	83,06		
0,45	25,53	0,80	90,11		
0,50	34,37	0,85	95,27		

Poder do Teste x Erro do Tipo II



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística