

# *Probabilidad Univariada*



Enfoque:  
Exactas

*Prof. Lorí Viali, Dr.*



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>3</b>
1.1. MODELOS .....	3
1.1.1. Modelo determinístico.....	3
1.1.2. Modelo não-determinístico ou probabilístico.....	3
1.2. EXPERIMENTO ALEATÓRIO (NÃO-DETERMINÍSTICO).....	4
1.2.1. Características dos Experimentos Aleatórios.....	4
1.3. O ESPAÇO AMOSTRAL .....	4
1.3.1. Classificação de um espaço amostra.....	5
1.4. EVENTOS .....	6
1.5. COMBINAÇÃO DE EVENTOS.....	6
1.6. EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES .....	7
1.7. PROPRIEDADE DAS COMBINAÇÕES DE EVENTOS .....	7
<b>2. CONCEITOS DE PROBABILIDADE.....</b>	<b>9</b>
2.1. A DEFINIÇÃO CLÁSSICA.....	9
2.1.1. Crítica à definição clássica.....	9
2.2. A DEFINIÇÃO FREQUÊNICAL .....	9
2.2.1. Frequência relativa de um evento .....	10
2.2.2. Propriedades da frequência relativa.....	10
2.2.3. Crítica à definição frequencial.....	11
2.3. DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA .....	11
2.3.1. Conseqüências dos axiomas (propriedades).....	11
2.4. PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA.....	13
2.4.1. Definição.....	14
2.4.2. Teorema da multiplicação.....	15
2.4.3. Independência de dois eventos .....	15
2.5. TEOREMAS DA PROBABILIDADE TOTAL E DE BAYES .....	16
2.5.1. Teorema da probabilidade total.....	17
2.5.2. Teorema de Bayes.....	18
<b>3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....</b>	<b>19</b>
3.1. INTRODUÇÃO .....	19
3.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA .....	20
3.2.1. A função de probabilidade.....	20
3.2.2. Representação da função de probabilidade .....	21
3.2.3. A função de distribuição acumulada.....	22
3.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA (CARACTERIZAÇÃO) .....	24



3.3.1. Expectância, esperança, média ou valor esperado de $X$ .....	24
3.3.2. A variância de $X$ .....	24
3.3.3. O desvio padrão.....	25
3.3.4. A variância relativa e o coeficiente de variação.....	25
3.4. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE DISCRETAS .....	26
3.4.1. A distribuição de Bernoulli.....	26
3.4.2. A distribuição Binomial.....	28
3.4.3. A distribuição Geométrica.....	31
3.4.4. A distribuição Binomial Negativa.....	33
3.4.5. A distribuição Hipergeométrica.....	36
3.4.6. A distribuição Uniforme Discreta.....	38
3.4.7. A distribuição de Poisson.....	40
3.4.8. Propriedades da distribuição de Poisson.....	43
3.4.9. Relação entre as distribuições Binomial, Hipergeométrica e Poisson.....	44
<b>4. EXERCÍCIOS.....</b>	<b>46</b>
<b>5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS.....</b>	<b>54</b>
<b>6. REFERÊNCIAS .....</b>	<b>58</b>



## 1. INTRODUÇÃO

A ciência manteve-se até pouco tempo atrás, firmemente apegada à lei da “causa e efeito”. Quando o efeito esperado não se concretizava, atribuía-se o fato ou a uma falha na experiência ou a uma falha na identificação da causa. Não poderia haver quebra da cadeia lógica. Segundo **Laplace (Pierre Simon)** uma vez conhecidas a vizinhança, a velocidade e a direção de cada átomo no universo, poder-se-ia, a partir daí, prever com certeza, o futuro até a eternidade.

Sabe-se hoje, através do princípio da incerteza, que não é bem assim. Que não existem meios que permitam determinar os movimentos dos elétrons individuais se conhecido a sua velocidade, conforme o estabelecido em 1927, pelo físico alemão **W. Heisenberg**.

### 1.1. MODELOS

Conforme **J. Neyman**, toda a vez que se emprega Matemática com a finalidade de estudar algum fenômeno deve-se começar por construir um modelo matemático. Este modelo pode ser: **determinístico** ou então **probabilístico**.

#### 1.1.1. Modelo determinístico

Neste modelo as condições sob as quais o experimento é executado, determinam o resultado do experimento. Tome-se, por exemplo, a lei de **Ohm**,  $V = I.R$ . Se  $R$  e  $I$  forem conhecidos, então  $V$  estará precisamente determinado.

#### 1.1.2. Modelo não-determinístico ou probabilístico

É um modelo em que de antemão não é possível explicitar ou definir um resultado particular. Este modelo é especificado através de uma distribuição de probabilidade. É utilizado quando se tem um grande número de variáveis influenciando o resultado e estas variáveis não podem ser controladas. Tome-se por exemplo, o lançamento de um dado onde se tenta prever o número da face que irá sair, a retirada de uma carta de um baralho, etc.

O modelo estocástico é caracterizado como um modelo probabilístico que depende ou varia com o tempo.



## 1.2. EXPERIMENTO ALEATÓRIO (NÃO-DETERMINÍSTICO)

Não existe uma definição satisfatória de Experimento Aleatório. Por isto é necessário ilustrar o conceito um grande número de vezes para que a idéia fique bem clara. Convém lembrar que os exemplos dados são de fenômenos para os quais modelos probabilísticos são adequados e que por simplicidade, são denominados de experimentos aleatórios, quando, de fato, o que deveria ser dito é “modelo não-determinístico aplicado a um experimento”.

Ao descrever um experimento aleatório deve-se especificar não somente que operação ou procedimento deva ser realizado, mas também o que é que deverá ser observado. Note-se a diferença entre  $E_2$  e  $E_3$ .

$E_1$ : Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.

$E_2$ : Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se o número de caras obtido.

$E_3$ : Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas.

$E_4$ : Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última defeituosa seja encontrada. Conta-se o número de peças retiradas.

$E_5$ : Uma lâmpada nova é ligada e observa-se o tempo gasto até queimar.

$E_6$ : Lança-se uma moeda até que ocorra uma cara e conta-se então o número de lançamentos necessários.

$E_7$ : Lançam-se dois dados e anota-se o total de pontos obtidos.

$E_8$ : Lançam-se dois dados e anota-se o par obtido.

### 1.2.1. Características dos Experimentos Aleatórios

Observando-se os exemplos acima pode-se destacar algumas características comuns:

1. Podem ser repetidos indefinidamente sob as mesmas condições.
2. Não se pode adiantar um resultado particular, mas pode-se descrever todos os resultados possíveis
3. Se repetidos muitas vezes apresentarão uma regularidade em termos de freqüência de resultados.

## 1.3. O ESPAÇO AMOSTRAL

A cada experimento pode-se associar **um** conjunto de resultados.



## Definição

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Anota-se por  $S$ ,  $E$  ou  $\Omega$ .

### Exemplo 1.1

Determinar o espaço amostra dos experimentos anteriores.  $S_i$  refere-se ao experimento  $E_i$ .

$$S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$S_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

$$S_3 = \{ cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckck, kckc, kcck, ckkc, ckkk, kckk, kkck, kkkc, kkkk \}$$

$$S_4 = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

$$S_5 = \{ t \in \mathbb{R} / t \geq 0 \}$$

$$S_6 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

$$S_7 = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

$$S_8 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

Ao descrever um espaço amostra de um experimento, deve-se ficar atento para o que se está observando ou mensurando. Deve-se falar em “um” espaço amostral associado a um experimento e não de “o” espaço amostral. Deve-se observar ainda que nem sempre os elementos de um espaço amostral são números.

### 1.3.1. Classificação de um espaço amostra

Um espaço amostral, conforme exemplos anteriores pode ser classificado em:

(a) Finito. São os espaços:  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_7$  e  $S_8$

(b) Infinitos. (i) Enumeráveis (ou contáveis):  $S_6$

(ii) Não-enumeráveis (ou não contáveis):  $S_5$



## 1.4. EVENTOS

O espaço amostral desempenha uma função básica na teoria da probabilidade. Mas a probabilidade é definida para subconjuntos de um espaço amostral.

### Definição:

Qualquer subconjunto de um espaço amostra  $S$  é denominado um evento (\*).

Assim tem-se que:

$S$  é o evento certo;

$\{a\}$  é o evento elementar e

$\emptyset$  é o evento impossível.

Convém observar que tecnicamente todo subconjunto de um espaço amostra é um evento apenas quando ele for finito ou, então, infinito enumerável. Se o espaço amostra é infinito não-enumerável é possível construir subconjuntos que não são eventos. Se  $S$  é finito, isto é,  $\#(S) = n$  então o número de eventos possíveis é  $\#P(A) = 2^n$ .

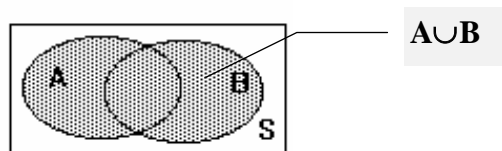
## 1.5. COMBINAÇÃO DE EVENTOS

Pode-se realizar operações entre eventos da mesma forma que elas são realizadas entre conjuntos. Antes de definir as operações é conveniente conceituar o que se entende por ocorrência de um evento.

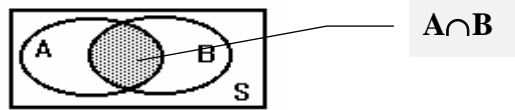
Seja  $E$  um experimento com um espaço amostra associado  $S$ . Seja  $A$  um evento de  $S$ . É dito que o evento  $A$  ocorre se realizada a experiência, isto é, se executado  $E$ , o resultado for um elemento de  $A$ .

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um mesmo espaço amostra  $S$ . Diz-se que ocorre o evento:

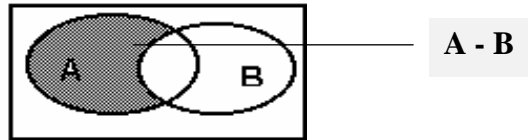
1. A união  $B$  ou  $A$  soma  $B$ , anotado por  $A \cup B$ , se e somente se  $A$  ocorre **ou**  $B$  ocorre.



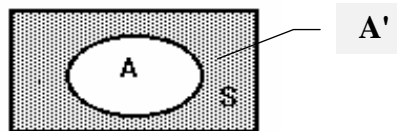
2. A produto  $B$  ou  $A$  interseção  $B$ , anotado por  $A \cap B$  ou  $AB$ , se e somente  $A$  ocorre **e**  $B$  ocorre.



3. A menos B ou A diferença B, anota-se  $A - B$ , se e somente se A ocorre e B **não** ocorre.

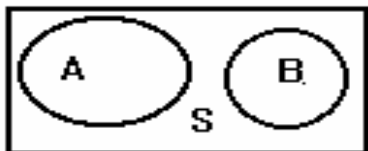


4. O complementar de A, anotado por  $\bar{A}$ ,  $A^C$  ou ainda  $A'$  se e somente se A **não** ocorre.



## 1.6. EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES

Dois eventos A e B, são denominados mutuamente exclusivos ou excludentes, se eles não puderem ocorrer juntos, isto é, se  $A \cap B = \emptyset$ .



## 1.7. PROPRIEDADE DAS COMBINAÇÕES DE EVENTOS

Os diagramas de **Venn** (John Venn 1834-1923) podem ser usados para ilustrar propriedades das operações entre conjuntos.

As propriedades que podem ser verificadas através dos diagramas são:

Propriedade comutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriedade associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propriedade distributiva:





$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Propriedades da identidade:

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

As leis de **De Morgan**<sup>1</sup>

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

---

<sup>1</sup> Em homenagem ao lógico Britânico Augustus de Morgan (1805-1871)



## 2. CONCEITOS DE PROBABILIDADE

Existem pelo menos três formas de se definir probabilidade. Entre elas a definição clássica, a freqüencial e a axiomática. A definição subjetiva não será tratada.

### 2.1. A DEFINIÇÃO CLÁSSICA

Seja  $E$  um experimento aleatório e  $S$  um espaço amostra associado formado por “ $n$ ” resultados igualmente prováveis. Seja  $A \subseteq S$  um evento com “ $m$ ” elementos. A probabilidade de  $A$ , anotada por  $P(A)$ , lê-se pe de  $A$ , é definida como sendo:  $P(A) = m / n$

Isto é, a probabilidade do evento  $A$  é o quociente entre o número “ $m$ ” de casos favoráveis e o número “ $n$ ” de casos possíveis.

#### Exemplo 2.1

Calcular a probabilidade de no lançamento de um dado equilibrado obter-se:

- (a) Um resultado igual a 4.
- (b) Um resultado ímpar.

#### Solução:

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad n = \#(S) = 6$$

$$(a) A = \{ 4 \} \quad m = \#(A) = 1 \text{ então } P(A) = m / n = 1 / 6 = 16,67\%$$

$$(b) B = \{ 1, 3, 5 \} \quad m = \#(B) = 3 \text{ então } P(B) = m / n = 3 / 6 = 50\%$$

#### 2.1.1. Crítica à definição clássica

(i) A definição clássica é dúbia, já que a idéia de “igualmente provável” é a mesma de “com probabilidade igual”, isto é, a definição é circular, porque está definindo essencialmente a probabilidade com seus próprios termos.

(ii) A definição não pode ser aplicada quando o espaço amostral é infinito.

### 2.2. A DEFINIÇÃO FREQUÊNICAL

Na prática acontece que nem sempre é possível determinar a probabilidade de um evento. Neste caso é necessário ter um método de aproximação desta probabilidade. Um dos métodos utiliza-



dos é a experimentação que objetiva estimar o valor da probabilidade de um evento  $A$  com base em valores reais. A probabilidade avaliada através deste processo é denominada de probabilidade empírica.

### 2.2.1. Frequência relativa de um evento

Seja  $E$  um experimento e  $A$  um evento de um espaço amostra associado ao experimento  $E$ . Suponha-se que  $E$  seja repetido “ $n$ ” vezes e seja “ $m$ ” o número de vezes que  $A$  ocorre nas “ $n$ ” repetições de  $E$ . Então a frequência relativa do evento  $A$ , anotada por  $fr_A$ , é o quociente:

$$fr_A = m/n = (\text{número de vezes que } A \text{ ocorre}) / (\text{número de vezes que } E \text{ é repetido})$$

#### Exemplo 2.2

(i) Uma moeda foi lançada 200 vezes e forneceu 102 caras. Então a frequência relativa de “caras” é:  $fr_A = 102 / 200 = 0,51 = 51\%$

(ii) Um dado foi lançado 100 vezes e a face 6 apareceu 18 vezes. Então a frequência relativa do evento  $A = \{\text{face } 6\}$  é:  $fr_A = 18 / 100 = 0,18 = 18\%$

### 2.2.2. Propriedades da frequência relativa

Seja  $E$  um experimento e  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostra associado  $S$ . Sejam  $fr_A$  e  $fr_B$  as frequências relativas de  $A$  e  $B$  respectivamente. Então.

- (i)  $0 \leq fr_A \leq 1$ , isto é, a frequência relativa do evento  $A$  é um número que varia entre 0 e 1.
- (ii)  $fr_A = 1$  se e somente se,  $A$  ocorre em todas as “ $n$ ” repetições de  $E$ .
- (iii)  $fr_A = 0$ , se e somente se,  $A$  nunca ocorre nas “ $n$ ” repetições de  $E$ .
- (iv)  $fr_{A \cup B} = fr_A + fr_B$  se  $A$  e  $B$  forem eventos mutuamente excludentes.

## Definição

Seja  $E$  um experimento e  $A$  um evento de um espaço amostra associado  $S$ . Suponhamos que  $E$  é repetido “ $n$ ” vezes e seja  $fr_A$  a frequência relativa do evento. Então a probabilidade de  $A$  é definida como sendo o limite de  $fr_A$  quando “ $n$ ” tende ao infinito. Ou seja:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr_A$$



Deve-se notar que a frequência relativa do evento  $A$  é uma aproximação da probabilidade de  $A$ . As duas se igualam apenas no limite. Em geral, para um valor de  $n$ , razoavelmente grande a  $fr_A$  é uma boa aproximação de  $P(A)$ .

### 2.2.3. Crítica à definição freqüencial

Esta definição, embora útil na prática, apresenta dificuldades matemáticas, pois o limite pode não existir. Em virtude dos problemas apresentados pela definição clássica e pela definição freqüencial, foi desenvolvida uma teoria moderna<sup>2</sup>, na qual a probabilidade é um conceito indefinido, como o ponto e a reta o são na geometria.

## 2.3. DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

Seja  $E$  um experimento aleatório com um espaço amostra associado  $S$ . A cada evento  $A \subseteq S$  associa-se um número real, representado por  $P(A)$  e denominado “probabilidade de  $A$ ”, que satisfaz as seguintes propriedades (axiomas):

(i)  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;

(ii)  $P(S) = 1$ ;

(iii) Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(iv) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Obs.: Os três primeiros axiomas são suficientes para lidar com espaços amostrais finitos. Para manejar espaços amostrais infinitos o axioma três deve ser substituído pelo axioma quatro.

### 2.3.1. Conseqüências dos axiomas (propriedades)

(i)  $P(\emptyset) = 0$

#### Prova

Seja  $A \subseteq S$  então tem-se que  $A \cap \emptyset = \emptyset$ , isto é,  $A$  e  $\emptyset$  são mutuamente excludentes. Então:

---

<sup>2</sup> Devida a Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)



$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$ , pelo axioma três. Cancelando  $P(A)$  em ambos os lados da igualdade segue que  $P(\emptyset) = 0$ .

(ii) Se  $A$  e  $\bar{A}$  são eventos complementares então:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$  ou  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

#### Prova

Tem-se que  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  e  $A \cup \bar{A} = S$ . Então:

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}), \text{ pela propriedade 3.}$$

(iii) Se  $A \subseteq B$  então  $P(A) \leq P(B)$

#### Prova

Tem-se:  $B = A \cup (B - A)$  e  $A \cap (B - A) = \emptyset$

Assim  $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$  e como  $P(B - A) \geq 0$  segue que:

$$P(B) \geq P(A)$$

(iv) Se  $A$  e  $B$  são dois eventos quaisquer então:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

#### Prova

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$  e  $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Logo  $P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$ . Do que segue:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

(v) Se  $A$  e  $B$  são dois eventos quaisquer de  $S$ , então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### Prova

$A \cup B = (A - B) \cup B$  e  $(A - B) \cap B = \emptyset$  Tem-se então:

$$P(A \cup B) = P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ pela propriedade (iv).}$$

(vi)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

#### Prova

Faz-se  $B \cup C = D$  e aplica-se a propriedade (v) duas vezes.



(vii) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são dois a dois mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

### Prova

A prova é realizada por indução matemática. O axioma três implica que o resultado vale para  $n = 2$ . Agora é preciso mostrar que se o resultado é verdadeiro para algum  $n > 2$  então ele vale para  $n + 1$ . Este resultado combinado com o fato de que ele é válido para  $n = 2$ , implica que ele é válido para  $n \geq 2$ .

Suponhamos que o resultado vale para " $n > 2$ ", isto é:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \text{ Vamos considerar o caso "n + 1", ou seja:}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cup A_{n+1}\right] = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}), \text{ pela propriedade sete.}$$

Então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i), \text{ que é o resultado desejado.}$$

(viii) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são eventos de um espaço amostra  $S$ , então:  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i < j=2}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < r=3}^n P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \dots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Os axiomas mais as propriedades fornecem um conjunto de resultados para que se possa calcular a probabilidade de qualquer evento  $A$  em termos de outros eventos dados. Entretanto ainda é necessária a atribuição de probabilidades iniciais para um conjunto básico de eventos a partir do qual as probabilidades dos demais poderão ser obtidas. Este problema é resolvido nas duas seções seguintes.

## 2.4. PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA

Considerando as propriedades vistas pra a probabilidade pode-se perceber que existem regras para desdobrar a união, a diferença e o complementar, no entanto, não existe uma regra para desdobrar o produto. Para obter uma regra para o produto é necessário um conceito adicional que é a idéia de probabilidade condicionada.



Suponha-se que se quer extrair duas peças ao acaso de um lote que contém 100 peças das quais 80 peças são boas e 20 defeituosas, de acordo com os critérios (a) com reposição e (b) sem reposição. Define-se os seguintes eventos:

$$A = \{ \text{A primeira peça é defeituosa} \} \quad \text{e} \quad B = \{ \text{A segunda peça é defeituosa} \}.$$

Então, se a extração for **com** reposição  $P(A) = P(B) = 20 / 100 = 1 / 5 = 20\%$ , porque existem 20 peças defeituosas num total de 100.

Agora se a extração for **sem** reposição tem-se ainda que  $P(A) = 20 / 100 = 20\%$ , mas o mesmo não é verdadeiro para  $P(B)$ . Neste caso, é necessário conhecer a composição do lote no momento da extração da segunda peça, isto é, é preciso saber se a primeira peça retirada foi ou não defeituosa. Neste caso é necessário saber se  $A$  ocorreu ou não. O que mostra a necessidade do conceito de probabilidade condicionada.

### 2.4.1. Definição

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostra  $S$ , associado a um experimento  $E$ , onde  $P(A) > 0$ . A probabilidade de  $B$  ocorrer condicionada a  $A$  ter ocorrido, será representada por  $P(B/A)$ , e lida como: “probabilidade de  $B$  dado  $A$ ” ou “probabilidade de  $B$  condicionada a  $A$ ”, e calculada por:

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$$

No exemplo acima, então  $P(B/A) = 19 / 99$ , pois se  $A$  ocorreu (isto é, se saiu peça defeituosa na primeira retirada) existirão na urna apenas 99 peças das quais 19 defeituosas.

Sempre que se calcular  $P(B/A)$  está se calculando a probabilidade de ocorrência do evento  $B$  em relação ao *espaço amostra reduzido*  $A$ , ao invés de fazê-lo em relação ao espaço amostral original  $S$ .

Quando se calcula  $P(B)$  está se calculando a probabilidade de estar em  $B$ , sabendo-se que se está em  $S$ , mas quando se calcula  $P(B/A)$  está calculando a probabilidade de  $B$ , sabendo-se que se está em  $A$  agora e não mais em  $S$ , isto é, o espaço amostra fica reduzido de  $S$  para  $A$ .

É simples verificar as seguintes propriedades de  $P(B/A)$  para  $A$  fixado:

(i)  $0 \leq P(B/A) \leq 1$ ,

(ii)  $P(S/A) = 1$ ,

(iii)  $P(B_1 \cup B_2 / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$  se  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

(iv)  $P(B_1 \cup B_2 \dots / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A) + \dots$  se  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

Observe-se que estas propriedades são idênticas aos axiomas de probabilidade.



Pode-se também comparar  $P(A/B)$  e  $P(A)$ . Para tanto considere-se os quatro casos ilustrados nos diagramas abaixo:

Tem-se:

(a)  $P(A/B) = 0$ , porque  $A$  não poderá ocorrer se  $B$  tiver ocorrido.

(b)  $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = [P(A) / P(B)] \geq P(A)$ , já que  $P(A) \leq P(B)$ , pois  $A \subseteq B$ .

(c)  $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = [P(B) / P(B)] = 1 \geq P(A)$ .

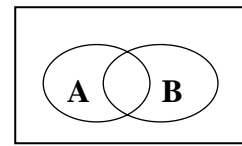
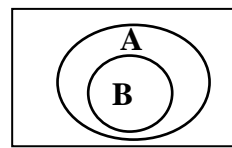
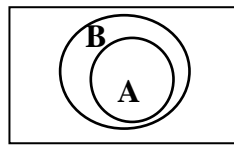
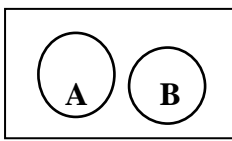
(d) Neste caso nada se pode afirmar sobre o relacionamento entre  $P(A/B)$  e  $P(A)$ .

a)  $A \cap B = \emptyset$

(b)  $A \subset B$

(c)  $B \subset A$

(d) Caso geral



## 2.4.2. Teorema da multiplicação

Com o conceito de probabilidade condicionada é possível apresentar uma maneira de se calcular a probabilidade da interseção de dois eventos  $A$  e  $B$  em função destes eventos. Esta expressão é denominada de teorema da multiplicação.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

## 2.4.3. Independência de dois eventos

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostra  $S$ .  $A$  e  $B$  são ditos **independentes** se a probabilidade de um deles ocorrer não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se:

$$P(A/B) = P(A) \text{ ou}$$

$$P(B/A) = P(B) \text{ ou ainda se}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Qualquer uma das três relações acima pode ser usada como definição de independência.

### Exemplo 2.3

[MEY78] Três componentes  $C_1$ ,  $C_2$ , e  $C_3$ , de um mecanismo são postos em série (em linha reta). Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja  $R$  o evento {  $C_2$  está à direita de  $C_1$  }, e seja  $S$  o evento {  $C_3$  está à direita de  $C_1$  }. Os eventos  $R$  e  $S$  são independentes? Por quê?



Solução:

Para que R e S sejam independentes deve-se ter:  $P(R \cap S) = P(R) \cdot P(S)$ .

O espaço amostra para este caso é:

$$S = \{C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_2C_1C_3, C_2C_3C_1, C_3C_1C_2, C_3C_2C_1\}$$

As seqüências em que  $C_2$  está à direita de  $C_1$  são:

$$R = \{C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_3C_1C_2\}. \text{ Logo: } P(R) = 3/6 = 50\%$$

As seqüências em que  $C_3$  está à direita de  $C_1$  são:

$$S = \{C_1C_2C_3, C_1C_3C_2, C_2C_1C_3\}. \text{ Logo } P(S) = 3/6 = 50\%$$

As seqüências em que  $C_2$  está à direita de  $C_1$  e  $C_3$  está também à direita de  $C_1$  são:

$$R \cap S = \{C_1C_2C_3, C_1C_3C_2\}. \text{ Logo}$$

$$P(R \cap S) = 2/6 = 1/3 = 33,33\% \neq P(R) \cdot P(S) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$$

Portanto os eventos R e S não são independentes.

## 2.5. TEOREMAS DA PROBABILIDADE TOTAL E DE BAYES

O conceito de probabilidade condicionada pode ser utilizado para calcular a probabilidade de um evento simples A ao invés da probabilidade da interseção de dois eventos A e B. Para tanto é necessário o conceito de partição de um espaço amostra.

### Definição

Diz-se que os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

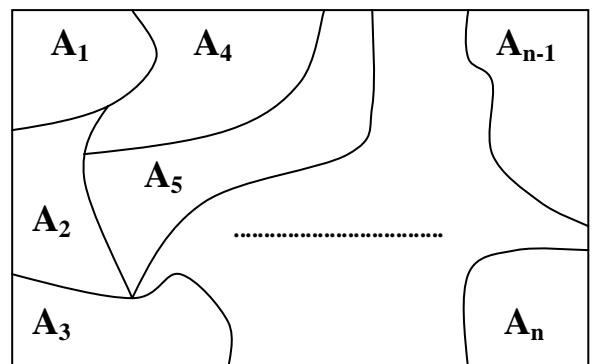
- (a)  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ .
- (b)  $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = S$
- (c)  $P(A_i) > 0$ , para todo i

#### Exemplo 2.4

Considere-se o espaço amostra obtido pelos números das faces no lançamento de um dado equilibrado e sejam os eventos:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5\} \text{ e } A_3 = \{6\}$$

Então, pode-se verificar facilmente que, os eventos acima formam um partição do espaço amostra  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .



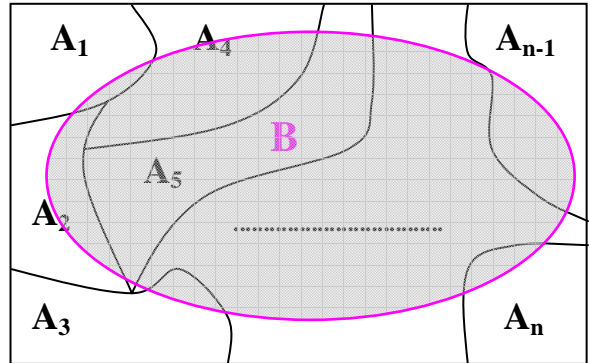


### 2.5.1. Teorema da probabilidade total

Considere-se um espaço amostra  $S$  e  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição deste espaço amostra. Seja  $B$  um evento de  $S$ . Então  $B$ , pode ser escrito como (A figura acima ilustra a partição com  $n = 8$ ):

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

É claro que, alguns destes conjuntos  $B \cap A_j$ , poderão ser vazios, mas isto não representa nenhum problema na decomposição de  $B$ . O importante é que todos os conjuntos  $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$  são dois a dois mutuamente excludentes. E por isto, pode-se aplicar a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes e escrever.



$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

Mas cada um dos termos  $P(B \cap A_j)$  pode ser escrito na forma:

$P(B \cap A_j) = P(A_j).P(B/A_j)$ , pela definição de probabilidade condicionada, obtém-se então o denominado teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \dots + P(A_n).P(B/A_n)$$

#### Exemplo 2.5

Uma determinada peça é manufaturada por 3 fábricas: A, B e C. Sabe-se que A produz o dobro de peças que B e que B e C produzem o mesmo número de peças. Sabe-se ainda que 2% das peças produzidas por A e por B são defeituosas, enquanto que 4% das produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas e colocadas em um depósito. Se do depósito for retirada uma peça ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja defeituosa?

#### Solução:

Considerem-se os seguintes eventos:

$D = \{ \text{A peça é defeituosa} \}$ ,  $A = \{ \text{A peça provém da fábrica A} \}$ ,  $B = \{ \text{A peça provém da máquina B} \}$  e  $C = \{ \text{A peça provém da máquina C} \}$ .

Tem-se então que:  $P(A) = 50\%$ ,  $P(B) = P(C) = 25\%$ , uma vez que só existem as 3 fábricas e que A produz o dobro de B e esta por sua vez produz a mesma quantidade que C. Sabe-se também que  $P(D/A) = P(D/B) = 2\%$  e que  $P(D/C) = 4\%$ .

Pelo teorema da probabilidade total pode-se escrever que:



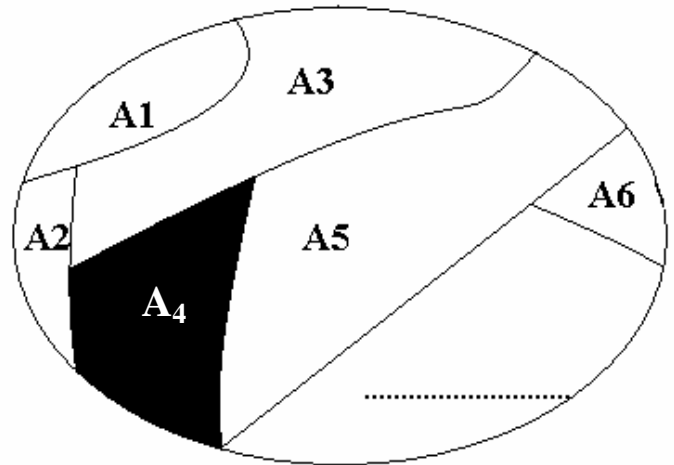
$P(D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C) = 0,5.0,02 + 0,25.0,02 + 0,25.0,04 = 2,50\%$ , pois A, B e C formam uma partição do espaço amostra S.

### 2.5.2. Teorema de Bayes

Suponha-se que no exemplo acima, uma peça é retirada do depósito e se verifica que é defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica A? ou B? ou ainda C?

Neste caso, o que se quer calcular é a probabilidade condicionada  $P(A/D)$ .

Pela notação já vista acima, e generalizando a questão o que se está interessado em obter é a probabilidade de ocorrência de um dos  $A_i$  dado que B ocorreu, isto é, o que se quer é saber o valor de  $P(A_i / B)$ , onde os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formam uma partição de S e B é um evento qualquer de S.



Aplicando a definição de probabilidade condicionada segue que:

$P(A_i / B) = P(A_i \cap B) / P(B) = P(A_i).P(B / A_i) / P(B)$ , onde  $P(B)$  é avaliado pelo teorema da probabilidade total. Este resultado é conhecido como **teorema de Bayes**. Assim:

$$P(A_i / B) = P(A_i).P(B / A_i) / [P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \dots + P(A_n).P(B/A_n)]$$

#### Exemplo 2.6

Considerando a pergunta acima vem então:

$P(A / D)$ , isto é a probabilidade de ter sido produzida pela máquina A dado que a peça é defeituosa é:

$$P(A / D) = P(A). P(D / A) / P(D) = 0,02.0,50 / (0,5.0,02 + 0,25.0,02 + 0,25.0,04) = 0,40 = 40\%$$



## 3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

### 3.1. INTRODUÇÃO

Ao se descrever o espaço amostra de um experimento nota-se que os elementos não são necessariamente números. Assim, por exemplo, no lançamento de duas moedas pode-se ter o seguinte espaço amostra:

$$S = \{ cc, ck, kc, kk \}$$

Contudo, na maior parte das vezes, se está interessado num resultado numérico, isto é, deseja-se associar aos elementos do espaço amostra  $S$  um número real  $x = X(s)$ .

Seja  $E$  um experimento com um espaço amostra associado  $S$ . Uma função  $X$  que associe a cada elemento de  $S$  ( $s \in S$ ) um número real  $x = X(s)$  é denominada **variável aleatória**.

O conjunto formado por todos os valores “ $x$ ”, isto é, a imagem da variável aleatória  $X$ , é denominado de **conjunto de valores de  $X$**  e anotado por  $X(S)$ . Desta forma:

$$X(S) = \{ x \in \mathfrak{R} / X(s) = x \}$$

#### Exemplo 3.1

Seja  $S$  o espaço amostra formado pelas seqüências obtidas no lançamento de 3 moedas equilibradas. Seja  $X$  a variável aleatória definida como sendo o número de caras da seqüência, isto é,  $X(s) = x =$  números de caras. O conjunto de valores da variável  $X$  é  $X(S) = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ , pois, neste caso, tem-se:

$$X(ccc) = 0$$

$$X(ckk) = 1, \text{ etc.}$$

Ou então:

$s$	kkk	ckk, kck, kkc	cck, ckc, kcc	ccc
$X(s)$	0	1	2	3

Conforme o conjunto de valores uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.



## 3.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Uma variável aleatória  $X$  é dita discreta se o seu conjunto de valores  $X(S)$  é finito ou então infinito contável ou enumerável.

Observação.: Um conjunto é dito contável se ele puder ser colocado em correspondência um a um com os números naturais.

### 3.2.1. A função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta (VAD), isto é, com  $X(S)$  finito ou infinito enumerável, definida num espaço amostral  $S$ . A cada resultado  $x_i$  de  $X(S)$  associa-se um número  $f(x_i) = P(X = x_i)$  denominado probabilidade de  $x_i$  e tal que satisfaz as seguintes propriedades:

$$f(x_i) \geq 0, \text{ para todo "i"}$$

$$\sum f(x_i) = 1$$

A função “ $f$ ” assim definida é denominada de **função de probabilidade** de  $X$

A coleção dos pares  $(x_i, f(x_i))$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$  é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD  $X$ .

Note-se que  $f(x) = P(X = x) = P(\{s \in S / X(s) = x\})$  Desta forma quando se calcula  $f(x)$  está se calculando, na realidade, a probabilidade do evento  $\{s \in S / X(s) = x\} \subseteq S$ .

#### Exemplo 3.2

Dois dados são lançados e observa-se o par obtido. O espaço amostra é formado por 36 resultados equiprováveis. Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias definidas da seguinte forma:

$X$  = soma do par obtido

$Y$  = maior valor do par

Tem-se então:

$$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Y(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Para  $X$  tem-se:

$$f(2) = P(X = 2) = P(\{(1, 1)\}) = 1/36$$

$$f(3) = P(X = 3) = P(\{(2, 1), (1, 2)\}) = 2/36$$

$$f(4) = P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = 3/36$$



$$f(5) = P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = 4/36$$

$$f(6) = P(X = 6) = P(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = 5/36$$

$$f(7) = P(X = 7) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = 6/36$$

$$f(8) = P(X = 8) = P(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = 5/36$$

$$f(9) = P(X = 9) = P(\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}) = 4/36$$

$$f(10) = P(X = 10) = P(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = 3/36$$

$$f(11) = P(X = 11) = P(\{(5, 6), (6, 5)\}) = 2/36$$

$$f(12) = P(X = 12) = P(\{(6, 6)\}) = 1/36$$

Em resumo:

<b>x</b>	2	3	4	5	6	7	8	8	10	11	12
<b>f(x)</b>	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Para Y tem-se:

$$f(1) = P(Y = 1) = P(\{(1, 1)\}) = 1/36$$

$$f(2) = P(Y = 2) = P(\{(2, 1), (2, 2), (1, 2)\}) = 3/36$$

$$f(3) = P(Y = 3) = P(\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}) = 5/36$$

$$f(4) = P(Y = 4) = P(\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\}) = 7/36$$

$$f(5) = P(Y = 5) = P(\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1)\}) = 9/36$$

$$f(6) = P(Y = 6) = P(\{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}) = 11/36$$

Em resumo:

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6
<b>f(x)</b>	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

### 3.2.2. Representação da função de probabilidade

Existem três maneiras de representar a função de probabilidade de uma VAD X:

(i) Através de uma tabela.

(ii) Através de uma expressão analítica para  $f(x)$  (fórmula).

(iii) Através de um diagrama, onde os valores da variável são registrados no eixo das abscissas e as probabilidades no eixo das ordenadas.

Exemplo 3.3

(i) As duas tabelas acima.

(ii) Considere-se a variável  $Y$ , do exemplo acima, onde  $Y(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Então:

$$f: Y(S) \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$y \rightarrow (2y - 1)/36$$

Deste modo:  $f(1) = (2 \cdot 1 - 1) / 36 = 1 / 36$

$$f(6) = (6 \cdot 2 - 1) / 36 = 11 / 36$$

(iii) Veja o diagrama abaixo.

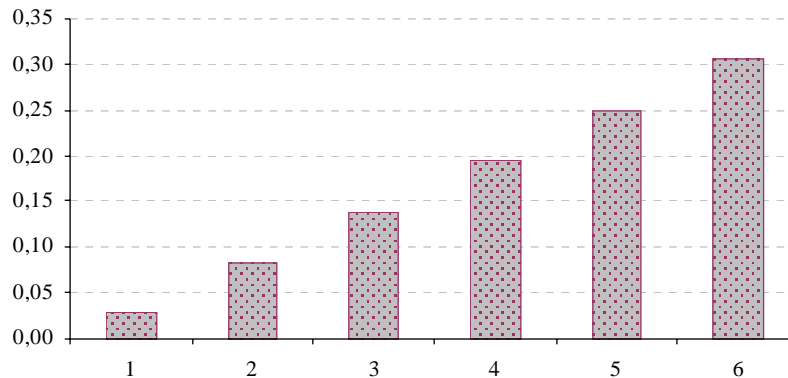


Figura 3.1 - Diagrama de barras da distribuição de  $Y$

### 3.2.3. A função de distribuição acumulada

Seja  $X$  uma VAD com função densidade  $f(x)$ . Então a **função de distribuição acumulada** - FDA, ou simplesmente **função de distribuição (ou repartição)** de  $X$  é a função  $F$  definida por:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Da Definição segue que:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a).$$

Se  $X$  for uma VAD então a  $F$  é a função “em escada” definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Se  $X$  for uma VAC então a função  $F(x)$  é definida por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Outras propriedades que decorrem da definição são:

(i)  $F(x)$  é uma função monótona crescente, isto é, se  $x_1 \leq x_2$ , então  $F(x_1) \leq F(x_2)$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

(iii)  $0 \leq F(x) \leq 1$  para  $-\infty < x < \infty$

(iv) Se  $X$  é discreta então  $F(x)$  apresenta um salto de altura  $f(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$  e é constante no intervalo  $[x_i; x_{i+1})$ . Assim  $F(x) = F(x_i)$  para  $x_i \leq x < x_{i+1}$  e  $F(x_{i+1}) = F(x_i) + f(x_{i+1})$ .

Pode ser notado que a FDA de qualquer variável discreta cresce sempre em saltos, isto é, ela é uma função em escada (observe a Figura 3.2), enquanto que a FDA de uma variável aleatória contínua é também contínua e não apresenta saltos (descontinuidades).

A FDA de uma variável aleatória é extremamente útil principalmente no manejo do cálculo de probabilidades de funções com expressões analíticas complicadas ou daquelas funções que não são integráveis numericamente.

Exemplo 3.4

Seja  $X$  uma VAD com a distribuição da tabela abaixo:

<b>x</b>	-2	1	2	4
<b>f(x)</b>	1/4	1/8	1/2	1/8

Então a função de distribuição de  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 && \text{se } x < -2 \\ &= 1/4 && \text{se } -2 \leq x < 1 \\ &= 3/8 && \text{se } 1 \leq x < 2 \\ &= 7/8 && \text{se } 2 \leq x < 4 \\ &= 1 && \text{se } x \geq 4 \end{aligned}$$

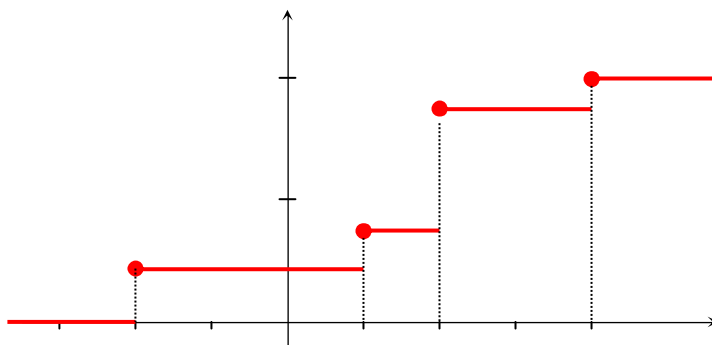


Figura 3.2 - A Função de Distribuição Acumulada





### 3.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA (CARACTERIZAÇÃO)

Considere  $X$  uma variável aleatória discreta assumindo os valores:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ , com probabilidades  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots$

#### 3.3.1. Expectância, esperança, média ou valor esperado de $X$

A média, expectância, **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória  $X$  é representada por  $\mu$  ou  $E(X)$  e calculada por:

$$\mu = E(X) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) + \dots = \sum x_i f(x_i)$$

##### Exemplo 3.5

Calcular o número esperado de faces caras no lançamento de duas moedas equilibradas.

##### Solução:

Seja  $X =$  Número de caras. Então a distribuição de  $X$  é dada por:

$x$	0	1	2
$f(x)$	1/4	2/4	1/4

Logo a expectância de  $X$  será:  $E(X) = 0.(1/4) + 1.(2/4) + 2.(1/4) = 1/2 + 1/2 = 1$  cara.

#### 3.3.2. A variância de $X$

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com média  $\mu = E(X)$ . Então a variância de  $X$ , anotada por  $\sigma^2$  ou  $V(X)$  é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = f(x_1) (x_1 - \mu)^2 + f(x_2) (x_2 - \mu)^2 + \dots + f(x_n) (x_n - \mu)^2 + \dots = \sum f(x_i) (x_i - \mu)^2$$

Pode-se demonstrar que a expressão da variância, acima, pode ser transformada na seguinte expressão:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum f(x_i) (x_i - \mu)^2 = \sum f(x_i) x_i^2 - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

##### Exemplo 3.6

Calcular a variância da distribuição do exemplo anterior.

##### Solução:

Tem-se que:



$E(X) = 1$ , então:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum f(x_i)(x_i - \mu)^2 = (1/4)(0 - 1)^2 + (2/4)(1 - 1)^2 + (1/4)(2 - 1)^2 = 1/2$$

Ou ainda:

$$E(X^2) = (1/4).0^2 + (2/4).1^2 + (1/4).2^2 = 3/2$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3/2 - 1^2 = 1/2$$

### 3.3.3. O desvio padrão

O desvio padrão da variável  $X$ , anotado por  $\sigma$ , é a raiz quadrada da variância.

### 3.3.4. A variância relativa e o coeficiente de variação

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com média  $\mu = E(X)$  e variância  $\sigma^2 = V(X)$ . Então a variância relativa de  $X$ , anotada por:  $\gamma^2$ , e definida por:  $\gamma^2 = \sigma^2 / \mu^2$

O coeficiente de variação de  $X$  é definido como a raiz quadrada da variância relativa:  $\gamma = \sigma / \mu$

#### Exemplo 3.7

Um vendedor recebe uma comissão de R\$ 50,00 por uma venda. Baseado em suas experiências anteriores ele calculou a distribuição de probabilidades das vendas semanais:

<b>x</b>	0	1	2	3	4
<b>f(x)</b>	0,10	0,20	0,40	0,20	0,10

- Qual é o valor esperado de vendas por semana?
- Qual é a probabilidade de ganhar pelo menos R\$ 150,00 por semana?
- Qual o desvio padrão das vendas semanais?
- Qual o coeficiente de variação das vendas semanais?

#### Solução:

(a)  $E(X) = 0.0,10 + 1.0,20 + 2.0,40 + 3.0,20 + 4.0,10 = 2$  vendas por semana. Logo, como ele recebe R\$ 50,00 por venda a renda esperada semanal é: R\$ 100,00.

(b) Para ganhar pelo menos R\$ 150,00 por semana ele deve realizar 3 ou 4 vendas por semana. Esta probabilidade é:  $P(X \geq 3) = 0,20 + 0,10 = 0,30 = 30\%$



(c) Deve-se inicialmente avaliar o valor da variância e para tanto calcula-se antes a média dos quadrados:  $E(X^2) = 0^2 \cdot 0,10 + 1^2 \cdot 0,20 + 2^2 \cdot 0,40 + 3^2 \cdot 0,20 + 4^2 \cdot 0,10 = 5,20$ .

A variância é então:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 5,20 - 2^2 = 5,20 - 4 = 1,20$$

O desvio padrão será:  $\sigma = \sqrt{1,20} = 1,10$

(d) O coeficiente de variação é o quociente entre o desvio padrão e a média, isto é:

$$\gamma = \sigma / \mu = 1,10 / 2 = 0,55 = 55\%$$

### 3.4. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE DISCRETAS

Existem algumas distribuições de probabilidade para variáveis discretas que pela sua frequência de uso vale a pena estudar mais detalhadamente. Estas distribuições apresentam expressões para o cálculo das probabilidades, isto é, as probabilidades  $f(x)$  podem ser avaliadas através de um modelo matemático conhecido. Duas destas distribuições são a Binomial e a distribuição de Poisson.

#### 3.4.1. A distribuição de Bernoulli

O experimento corresponde a qualquer um que produza apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso” é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.

O conjunto de valores  $X(S) = \{0, 1\}$  e a função de probabilidade é dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p = q & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A representação gráfica da distribuição é dada por:

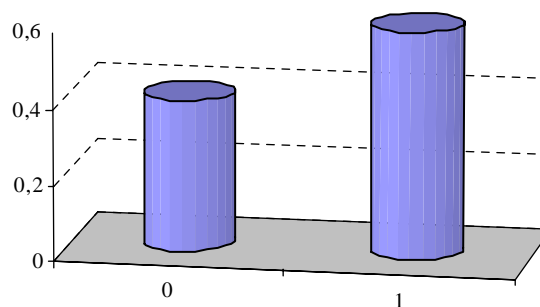


Figura 3.3 – Distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p = 0,40$



A função de distribuição da Bernoulli de parâmetro “p” é dada por:

$$F(x) = P(X \leq) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ p & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sua representação gráfica pode ser vista na Figura 3.4

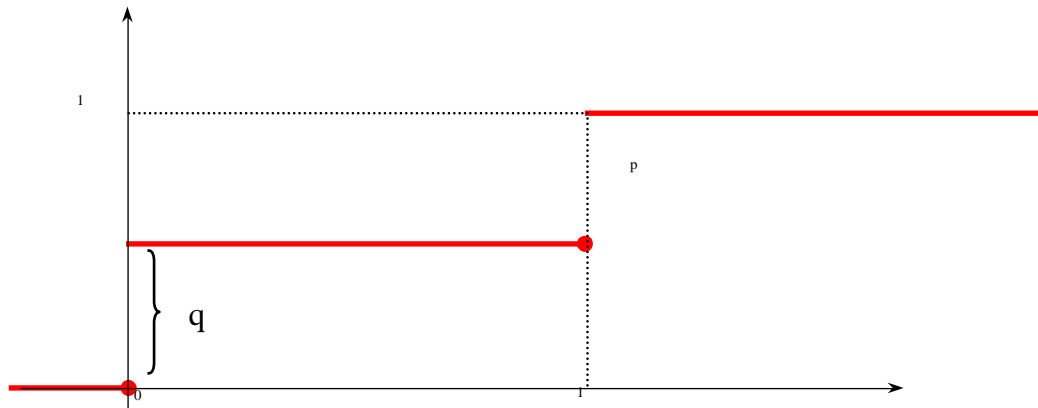


Figura 3.4 – FDA de uma Bernoulli com parâmetro  $p = 0,40$

## Propriedades da distribuição de Bernoulli

### Média, expectância ou valor esperado

$\mu = E(X) = \sum x \cdot f(x) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ , isto é, a média de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli é igual ao seu parâmetro “p”.

### Variância

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 0 \cdot q + 1 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$ , isto é, a variância de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli é igual ao produto “pq”. Analisando este produto percebe-se que ele é máximo quando o valor do parâmetro  $p = 0,50$ .

### O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

### Exemplo 3.8

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja  $X =$  “o número de circuitos rejeitados em um teste”. Determine a distribuição de  $X$ .

Solução:

Como se trata de um único teste, a variável  $X$  é Bernoulli com  $p = 10\%$ , assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

### 3.4.2. A distribuição Binomial

Seja  $E$  um experimento aleatório e  $S$  um espaço amostra associado. Seja  $A \subseteq S$  um evento de  $S$ . Seja “ $n$ ” o número de vezes que o experimento  $E$  é repetido e seja “ $p$ ” a probabilidade de  $A$  ocorrer em cada uma das “ $n$ ” repetições de  $E$ , de modo que, “ $p$ ” permaneça constante durante as “ $n$ ” repetições de  $E$ . Como existem apenas duas situações:  $A$  ocorre ou  $A$  não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de  $A$  não ocorrer como sendo  $q = 1 - p$ . Em certas situações a probabilidade “ $p$ ” é denominada de probabilidade de “sucesso” e a probabilidade “ $q$ ” de probabilidade de fracasso.

#### Definição:

Seja  $X$  uma VAD definida por  $X =$  número de vezes que  $A$  ocorreu nas “ $n$ ” repetições de  $E$ . A variável aleatória  $X$  é denominada de variável aleatória Binomial. O conjunto de valores de  $X$ , isto é,  $X(S)$  é:

$$X(S) = \{ 0, 1, 2, 3, \dots, n \}$$

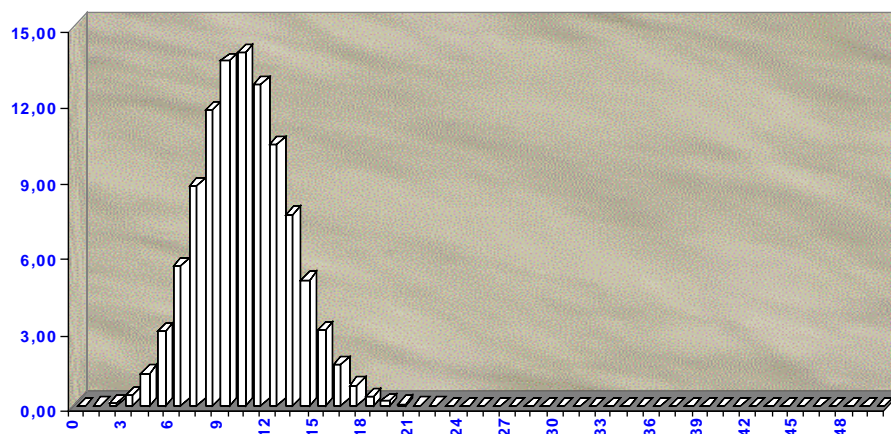


Figura 3.5 – Distribuição  $B(50; 0,20)$

**Teorema:**

Se  $X$  é uma variável aleatória com um comportamento Binomial, então a probabilidade de  $X$  assumir um dos valores do conjunto  $X(S)$  é calculada por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}, \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

**Demonstração:**

Considere-se um elemento particular do espaço amostra  $S$ , satisfazendo à condição  $X = x$ . Como todas as repetições são independentes a probabilidade desta seqüência particular é dada por:  $p^k(1 - p)^{n - k}$ , mas esta mesma probabilidade está associada a qualquer outro resultado em que  $X = k$ . O número de resultados em que isto ocorre é dado por  $\binom{n}{k}$ , porque se deve escolher exatamente “ $k$ ” casos dentre “ $n$ ” possibilidades para o evento  $A$ . Como estes resultados são todos mutuamente excludentes, então o valor de  $P(X = k)$  é o da fórmula acima.

**Representação:**

Se  $X$  tem um comportamento Binomial de parâmetros “ $n$ ” e “ $p$ ” então representa-se  $X$  por  $B(n, p)$ .

**Exemplo 3.9**

Considerando  $X$  como sendo a VAD igual a “número de vezes que ocorre face cara em 5 lançamentos de uma moeda equilibrada”, determinar a probabilidade de ocorrer:

- (a) Duas caras
- (b) Quatro caras
- (c) No máximo duas caras

**Solução:**

Neste caso, tem-se:

$n = 5 =$  número de lançamentos.

$X =$  número de caras nos 5 lançamentos  $\Rightarrow X(S) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$p = P(\text{cara em um lançamento}) = 0,50$ , pois a moeda é equilibrada. Logo  $q = 1 - p = 0,50$

Então:



$$f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{5-x}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(a) P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 10 \cdot 0,25 \cdot 0,125 = 31,25\%$$

$$(b) P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 5 \cdot 0,0625 \cdot 0,5 = 15,62\%$$

$$(c) P(X \leq 2) = \binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 0,5^5 + 5 \cdot 0,5^5 + 10 \cdot 0,5^5 = 50\%$$

## Propriedades da distribuição binomial

A vantagem de se ter um modelo conhecido é que podemos determinar suas características de um modo geral. Assim se  $X$  é uma VAD com uma distribuição Binomial tem-se:

### Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot f(x) = \sum x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = np, \text{ isto é, a média de uma variável aleatória com dis-}$$

tribuição binomial é igual ao produto dos parâmetros “ $n$ ” e “ $p$ ”.

### Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum x^2 \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} - (np)^2 = npq, \text{ isto é, a variância de uma variável aleatória}$$

com distribuição binomial é igual ao produto dos parâmetros “ $n$ ” e “ $p$ ” e multiplicados ainda por “ $q$ ”.

### O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

### Exemplo 3.10

A probabilidade de um exemplar defeituoso com que opera certo processo produtivo é de 10%. Considerando  $X$  a variável “número de unidades defeituosas em uma amostra ocasional de 20 unidades”, determinar:

- O número médio de item defeituosos na amostra.
- O desvio padrão do número de item defeituosos na amostra.



Solução:

(a)  $E(X) = np = 20 \cdot 0,10 = 2$  itens defeituosos

(b)  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot 0,10 \cdot 0,90} = \sqrt{1,80} = 1,34$  itens defeituosos.

Exemplo 3.11

[NET74] Num determinado processo de fabricação 10% das peças são consideradas defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades cada uma.

(a) Qual a probabilidade de haver exatamente 3 peças defeituosas numa caixa?

(b) Qual a probabilidade de haver duas ou mais peças defeituosas numa caixa?

(c) Se a empresa paga uma multa de R\$ 10,00 por caixa em que houver alguma peça defeituosa, qual o valor esperado da multa num total de 1000 caixas?

Solução:

(a)  $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot (0,10)^3 \cdot (0,90)^2 = 10 \cdot 0,001 \cdot 0,81 = 0,81\%$

(b)  $P(\text{Duas ou mais defeituosas}) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ . Ao invés de calcular desta forma é mais conveniente utilizar o complementar. Assim:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0,5905 + 0,3280) = 8,15\%$$

(c) A probabilidade de uma caixa pagar multa é:

$$P(\text{PM}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,5905 = 40,95\%$$

Neste caso tem-se uma nova Binomial com  $n = 1000$  e  $p = 40,95\%$ . O número esperado de caixas que vão pagar multa, isto é, com uma ou mais peças defeituosas será:

$$E(\text{PM}) = np = 1000 \cdot 0,4095 = 409,5 \text{ caixas.}$$

Como cada uma paga R\$ 10,00 de multa, o valor total da multa será:

$$\text{PM} = \text{R\$ } 10,00 \cdot 409,5 = \text{R\$ } 4\,095,00$$

### 3.4.3. A distribuição Geométrica

A distribuição Geométrica, a exemplo da Binomial, também está relacionada com o experimento de Bernoulli. A diferença é que, agora, o que é fixado é o primeiro sucesso e não o número de tentativas.





### Definição:

Seja  $X$  = número de tentativas realizadas até se conseguir o primeiro sucesso em um experimento de Bernoulli. Então  $X$  é uma VAD denominada de Geométrica.

O conjunto de valores é dado por  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$

A função de probabilidade é dada por:  $f(x) = p \cdot q^{x-1}$

A representação gráfica de uma distribuição com parâmetro  $p = 0,40$  é dada na Figura 3.6.

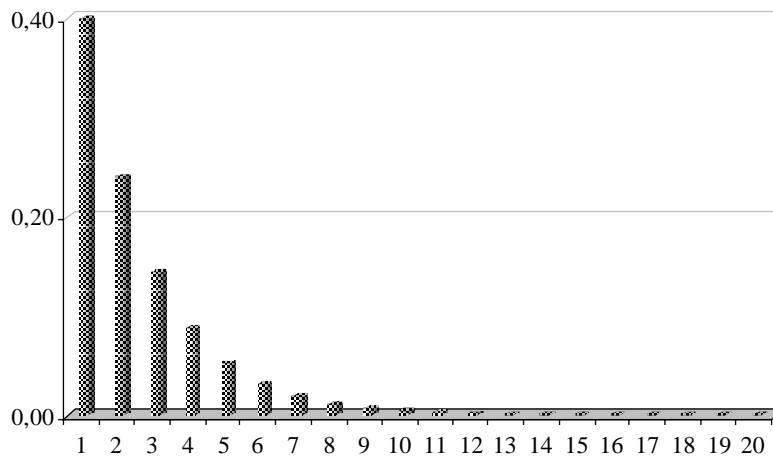


Figura 3.6 – Distribuição G(0,4)

A função de distribuição acumulada de uma Geométrica é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 - q^x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

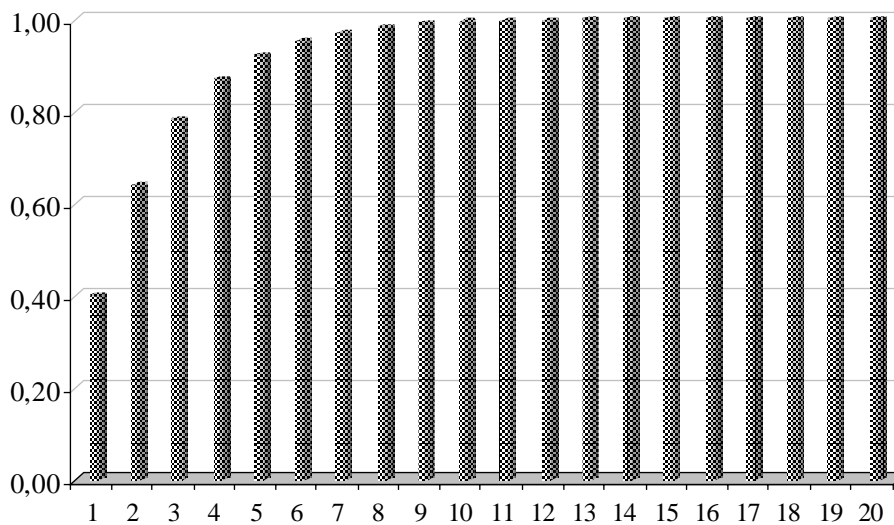


Figura 3.7 – A distribuição acumulada da G(0,4)



## Propriedades da distribuição Geométrica

### Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p \cdot q^{x-1} = \frac{1}{p}$$

### Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 f(x) - \mu^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p q^{x-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

### O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{q/p}$$

### Exemplo 3.12

Suponha que um jogador de futebol converta 3 de cada 4 penalidades cobradas. Determine a probabilidade de ele errar 4 penalidades antes de converter a primeira?

#### Solução:

Neste caso, tem-se:  $p = (3/4) = 75\%$  e  $q = (1/4) = 25\%$

$X$  = Número de tentativas antes do primeiro sucesso, é, então, uma  $G(0,75)$

$$f(x) = P(X = x) = 0,75 \cdot 0,25^{x-1} \text{ para } x = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto:

$$f(4) = P(X = 4) = 0,75 \cdot 0,25^3 = 1,17\%$$

### 3.4.4. A distribuição Binomial Negativa

A distribuição binomial negativa é também conhecida como de Pascal<sup>3</sup> ou de Pólya<sup>4</sup>. Ela fornece o número de falhas até um número fixo de sucessos. Um experimento que apresenta uma distribuição binomial negativa satisfaz as seguintes condições:

- # O experimento consiste de uma seqüência de tentativas independentes;

---

<sup>3</sup> Blaise Pascal (1623 – 1662)



- Cada tentativa apresenta apenas dois resultados: sucesso ou fracasso;
- A probabilidade de sucesso permanece constante em todas as tentativas;
- O experimento continua até que um total de “r” sucessos sejam observados, onde “r” é um valor inteiro maior do que um, fixado de antemão.

## Definição:

Seja  $X$  = número de tentativas realizadas até se conseguir o r-ésimo sucesso.

Então  $X$  é uma VAD denominada de Binomial Negativa ou de Pascal.

O conjunto de valores é dado por  $X = \{r, r + 1, r + 2, \dots\}$

A função de probabilidade é dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

A representação gráfica de uma distribuição com parâmetro  $p = 0,80$  é dada na Figura 3.8.

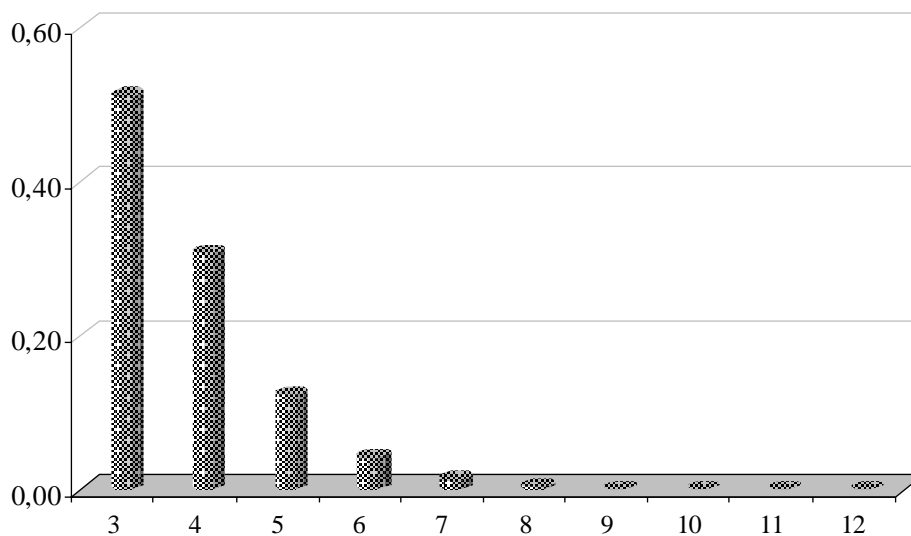


Figura 3.8 – Distribuição BN(3; 0,8)

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < r \\ \sum_{k=r}^x \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} & \text{se } x \geq r \end{cases}$$

<sup>4</sup> Geoge Pólya (1887 – 1985)

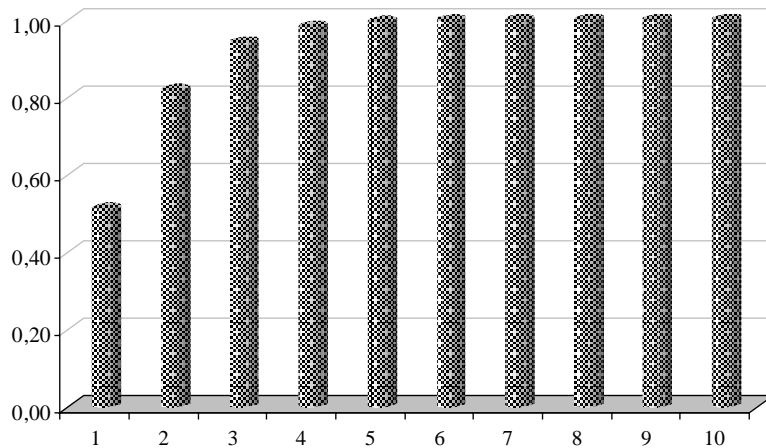


Figura 3.9 – Distribuição acumulada da BN(3; 0,8)

## Propriedades da distribuição Binomial Negativa

### Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \cdot \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = \frac{r}{p}$$

### Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{x=r}^{\infty} x^2 f(x) - \mu^2 = \sum_{x=r}^{\infty} x^2 \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{rq}{p^2}$$

### O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{rq/p}$$

### Exemplo

Suponha que um jogador de basquete acerte 4 a cada 5 lances livres. Seja X o número de erros antes do terceiro acerto. Determine a probabilidade que ele precise fazer 6 lances, isto é,  $P(X = 6)$ .

### Solução:

Neste caso, tem-se:

$$r = 3, p = (4/5) = 80\% \text{ e } q = (1/5) = 20\%$$

X = Número de tentativas antes do terceiro acerto é, então, uma BN(3; 0,8)



$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r} 0,8^3 0,2^{x-3}$$

onde  $x = 3, 4, 5, 6, \dots$

$$f(6) = P(X = 6) = \binom{6-1}{2} 0,8^3 \cdot 0,2^{6-3} = \binom{5}{2} 0,8^3 \cdot 0,2^3 = 0,0410 = \mathbf{4,10\%}$$

## Observações:

Existe uma relação entre a Binomial e a Pascal (Binomial Negativa). Na Binomial fixa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) e observa-se o número de sucessos.

Na Binomial Negativa fixa-se o número de sucessos e observa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) necessário para obter o número fixado de sucessos.

Um segundo caso especial da distribuição Binomial Negativa surge quando se tem  $r = 1$ . Neste caso, tem-se a denominada distribuição Geométrica, isto é o número necessário de provas de Bernoulli até a obtenção do primeiro sucesso.

### 3.4.5. A distribuição Hipergeométrica

Considere-se um conjunto de  $N$  elementos,  $r$  dos quais tem uma determinada característica ( $r \leq N$ ) e  $N - r$  não tenham esta característica. Extraí-se  $n$  elementos ( $n \leq N$ ) **sem** reposição. Seja  $X$  a variável aleatória igual ao número de elementos que possuem a característica entre os  $n$  retirados.  $X$  é denominada de variável aleatória hipergeométrica.

As probabilidades de uma variável aleatória hipergeométrica podem ser avaliadas por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ com } x = \max\{0, N - r - n\}, \dots, \min(r, n).$$

Uma vez que  $X = x$ , se e somente se, forem retirados  $x$  elementos dentre os  $r$  que possuem a característica e forem retirados  $n - x$  dentre os  $n - r$  que não possuem a característica.

Propriedades da distribuição Hipergeométrica

Fazendo  $p = r/N$  e  $q = (N - r) / N$ , tem-se:



## Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{x} \cdot \frac{\binom{\mathbf{r}}{\mathbf{x}} \binom{\mathbf{N}-\mathbf{r}}{\mathbf{n}-\mathbf{x}}}{\binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}} = \dots = (rn) / N = np.$$

## Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum \mathbf{x}^2 \cdot \frac{\binom{\mathbf{r}}{\mathbf{x}} \binom{\mathbf{N}-\mathbf{r}}{\mathbf{n}-\mathbf{x}}}{\binom{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}} - (np)^2 = npq \frac{N-n}{N-1}.$$

$$(c) P(X = x) \cong \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \text{ para } N \text{ grande.}$$

Note-se que se as extrações fossem feitas **com** reposição, ter-se-ia uma distribuição Binomial. A propriedade (c) afirma que para N suficientemente grande a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela distribuição Binomial. Em geral, esta aproximação será boa se  $(n / N) \leq 0,1$ .

A distribuição hipergeométrica será representada por  $H(r; n; N)$

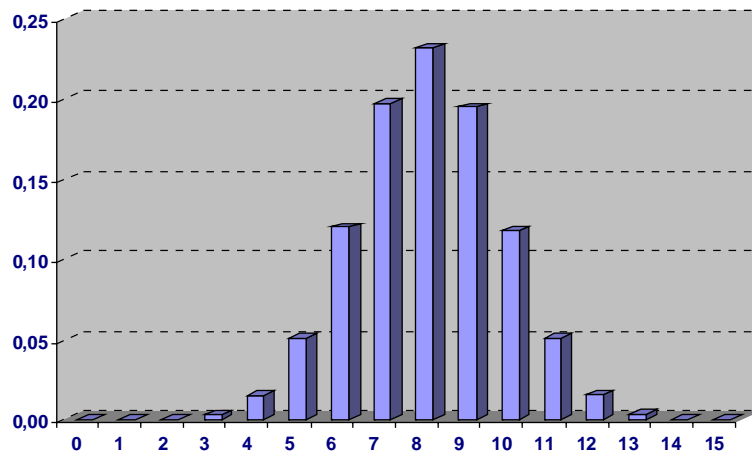


Figura 3.10 – Distribuição hipergeométrica  $H(20; 20; 50)$

### Exemplo 3.13

Uma caixa contém 12 lâmpadas das quais 5 estão queimadas. São escolhidas 6 lâmpadas ao acaso. Qual a probabilidade de que:

(a) Exatamente duas estejam queimadas?



- (b) Pelo menos uma esteja boa?
- (c) Pelo menos duas estejam queimadas?
- (d) O número esperado de lâmpadas queimadas?
- (e) A variância do número de lâmpadas queimadas?

Solução:

Tem-se  $N = 12$ ,  $r = 5$  e  $n = 6$ , então:

$$(a) P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{7}{4}}{\binom{12}{6}} = 37,88\%$$

(b) Se são retiradas 6 lâmpadas e somente 5 estão queimadas, então necessariamente uma será boa, portanto:

$$P(\text{pelo menos uma boa}) = 100\%.$$

$$(c) P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{7}{6}}{\binom{12}{6}} - \frac{\binom{5}{1} \binom{7}{5}}{\binom{12}{6}} = 87,88\%.$$

$$(d) E(X) = (nr) / N = 5.6 / 12 = 30/12 = 5/2 = 2,50.$$

$$(e) V(X) = \frac{nr}{N} \frac{(N-r)}{N} \frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5.7.6}{12.12.11} = 210/1584 = 0,1326 = 13,26\%.$$

### 3.4.6. A distribuição Uniforme Discreta

A distribuição uniforme é a mais simples das variáveis discretas. A variável assume os valores:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sempre com igual probabilidade.

#### Definição

Uma variável aleatória  $X$  que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é dita uniforme discreta se todos os valores ocorrem com a mesma probabilidade, isto é,  $f(x_i) = 1/n$ .

A Figura 3.11 representa uma distribuição uniforme discreta de uma variável que assume os valores de 1 a 10.

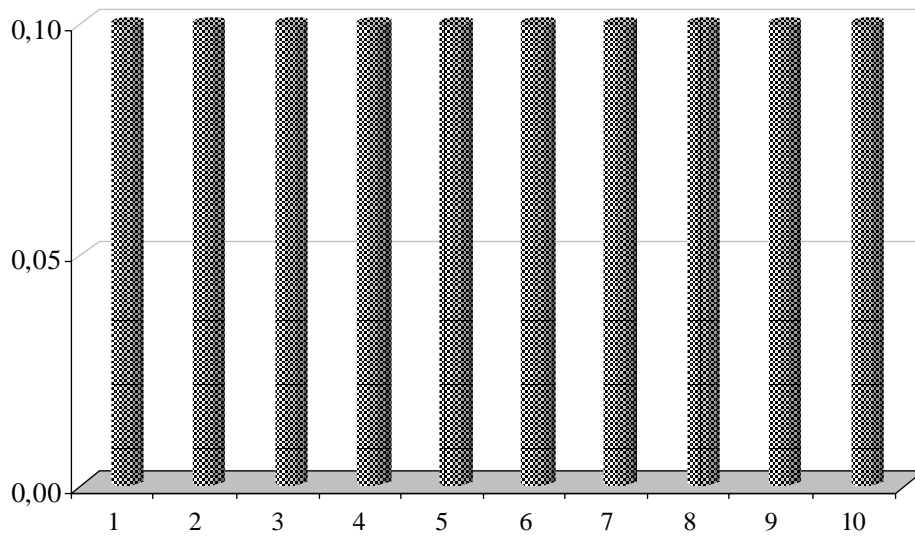


Figura 3.11 – Distribuição Uniforme Discreta com valores de 1 a 10

A função acumulada é dada por:

$$F(x_i) = P(\leq x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \frac{i}{n} & \text{se } x \geq x_i \end{cases}$$

A Figura 3.12 representa a função de distribuição acumulada de uma uniforme discreta no conjunto variando de 1 a 10.

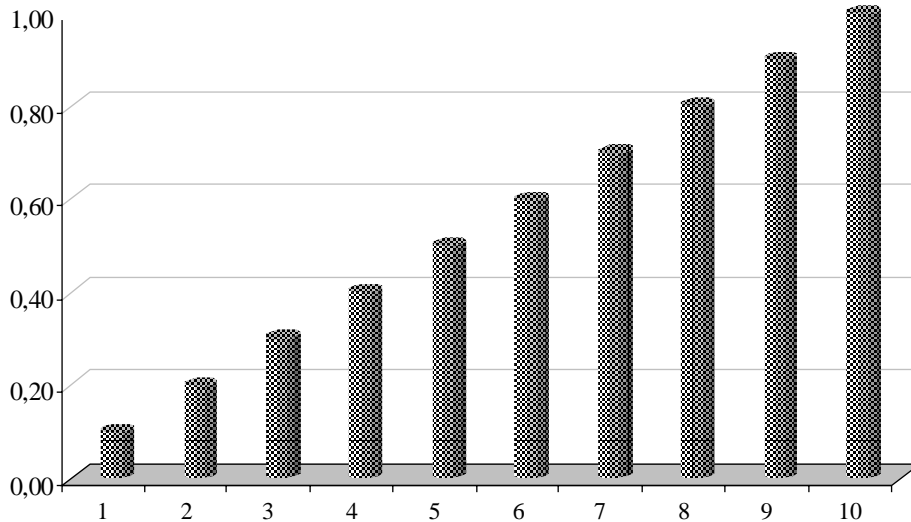


Figura 3.12 – FDA de uma uniforme no conjunto de 1 a 10





## Propriedades da distribuição Uniforme Discreta

### Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{1}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n^2} = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n} \right]$$

### Exemplo 3.14

Suponha que um dado honesto é lançado. Seja  $X =$  valor da face voltada para cima. Determinar a distribuição de  $X$ .

#### Solução:

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6	<b>Σ</b>
<b>f(x)</b>	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	<b>1</b>

### 3.4.7. A distribuição de Poisson

Na distribuição binomial, a variável de interesse era o número de sucessos (ocorrências do evento  $A$ ) em um intervalo discreto ( $n$  repetições do experimento  $E$ ). Muitas vezes, entretanto, o interesse reside no número de sucessos em um intervalo contínuo, que pode ser de tempo, comprimento, superfície, etc. Para se caracterizar uma distribuição que leve em conta o número de sucessos (valores) em um intervalo contínuo, será suposto que:

- (i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;
- (ii) Em intervalos de mesmo comprimento, são iguais as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos;
- (iii) Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;
- (iv) Em intervalos muito pequenos, a probabilidade de um sucesso é proporcional ao comprimento do intervalo.



Se os valores de uma variável satisfazem as hipóteses (i) a (iv) acima se dirá que ela segue um processo de Poisson.

## Definição:

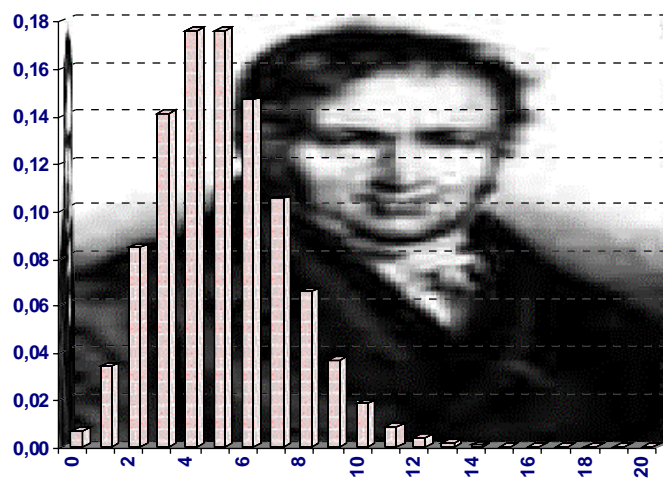
Seja  $X$  uma VAD definida por um processo de Poisson, assumindo os valores:  $0, 1, \dots, n, \dots$ , com taxa  $\lambda > 0$ .

Então:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ onde } x \text{ é o número de eventos que ocorrem}$$

em um intervalo sobre o qual se espera uma média  $\lambda$  de ocorrências.

Além disso,  $X$  pode ser definida como o número de eventos que ocorrem sobre um período de tempo  $t$ , substituindo  $\lambda$  na equação acima por  $\lambda t$ . Desta forma a distribuição de Poisson pode ser escrita como:



$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A distribuição de Poisson será representada por  $P(\lambda)$ .

**Figura 3.13 – Distribuição de Poisson – P(5)**

### Exemplo 3.15

Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem defeitos a uma taxa de 1 a cada 2000 metros. Qual a probabilidade de que um rolo com 2000 metros de fita magnética:



- (a) Não tenha defeitos?  
(b) Tenha no máximo dois defeitos?  
(c) Tenha pelo menos dois defeitos?

Solução:

Neste caso, tem-se:

$\lambda$  = Taxa de defeitos a cada 2000 metros.

X = número de defeitos a cada dois mil metros.

$x = 0, 1, 2, 3, \dots$

Então:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(a) P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = e^{-1} = 36,79\%$$

$$(b) P(X \leq 2) = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} 1^1}{1!} + \frac{e^{-1} 1^2}{2!} = \frac{5e^{-1}}{2} = 91,97\%$$

$$(c) P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left[ \frac{e^{-1} 1^0}{0!} + \frac{e^{-1} 1^1}{1!} \right] = 1 - 2e^{-1} = 26,42\%$$

Exemplo 3.16

[NET74] Um dado é formado por chapas de plástico de 10x10 cm. Em média aparecem 50 defeitos por metro quadrado de plástico, segundo uma distribuição de Poisson.

- (a) Qual a probabilidade de uma determinada face apresentar exatamente 2 defeitos?  
(b) Qual a probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos?  
(c) Qual a probabilidade de que pelo menos 5 faces sejam perfeitas?

Solução:

(a) Em média aparecem:

$$d = 50 \text{ defeitos/m}^2 = 50/10\,000 \text{ defeitos/cm}^2$$

Como cada face tem  $a = 10\text{cm} \times 10\text{cm} = 100\text{ cm}^2$ , tem-se então:

$$\lambda = (50/10000) \text{ defeitos/cm}^2 \times 100\text{ cm}^2 = 0,5 \text{ defeitos por face.}$$

A probabilidade de uma face apresentar dois defeitos será:



$$P(X = 2) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^2}{2!} = 7,58\%$$

(b) No dado inteiro, a área total será  $a = 6 \times 100 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$  e o número médio de defeitos será então:

$$\lambda = (50/10000) \text{ defeitos/cm}^2 \times 600 \text{ cm}^2 = 3 \text{ defeitos}$$

A probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos será:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + \dots = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[ \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} \right] = 1 - [0,0498 + 0,1494] = 80,08\% \end{aligned}$$

(c) A probabilidade de pelo menos 5 faces perfeitas é:

$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6)$ . A probabilidade de uma face ser perfeita é a probabilidade de ela não apresentar defeitos, isto é:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^0}{0!} = 60,65\%$$

Tem-se então uma binomial  $Y$  com  $n = 6$  (número de faces do dado) e  $p = 60,65\%$  = probabilidade de uma face ser perfeita. Então a probabilidade de pelo menos 5 perfeitas, será:

$$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6) = \binom{6}{5} \cdot (0,6065)^5 \cdot (0,3935)^1 + \binom{6}{6} \cdot (0,6065)^6 \cdot (0,3935)^0 =$$

24,36%

### 3.4.8. Propriedades da distribuição de Poisson

Se  $X$  for uma VAD com distribuição de Poisson, então:

#### Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x f(x) = \sum x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \lambda$$

#### Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum x^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$



## O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

### 3.4.9. Relação entre as distribuições Binomial, Hipergeométrica e Poisson

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com distribuição Hipergeométrica de parâmetros “ $n$ ”, “ $r$ ” e “ $N$ ”. Então quando  $N$  e  $r$  crescem, isto tendem ao infinito, de modo que o quociente  $p = r/N$  permaneça constante, então:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com distribuição Binomial de parâmetros “ $n$ ” e “ $p$ ”. Isto é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Admita-se que quando  $n \rightarrow \infty$ , tenha-se  $np = \alpha = \text{constante}$ , ou de uma forma equivalente, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , de modo que  $np \rightarrow \alpha$ . Nestas condições tem-se então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Os teoremas afirmam que os três modelos convergem sempre que alguns valores tendem a crescer de modo que outros permaneçam relativamente constantes.

#### Exemplo 3.17

Uma amostra de 20 peças é retirada de um lote de 100 peças de uma máquina que trabalha com um índice de defeitos de 4%. Determinar a probabilidade de se encontrar duas peças defeituosas na amostra.

#### Solução:

(a) Pela Binomial, tem-se:



$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot (0,04)^2 \cdot (0,96)^{18} = \mathbf{14,58\%}$$

(b) Usando uma aproximação pela distribuição de Poisson de média  $\mu = np = 20 \cdot 0,04 = 0,8$ , tem-se:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-0,8} 0,8^2}{2!} = \mathbf{14,38\%}$$

(c) Este exemplo pode ainda ser resolvido através da Hipergeométrica. Se considerarmos que dois por cento de 50 é uma peça.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{96}{18}}{\binom{100}{20}} = \mathbf{15,31\%}$$



## 4. EXERCÍCIOS

- (12) Quatro moedas são lançadas e observa-se a seqüência de caras e coroas obtida. Qual o espaço amostra do experimento.
- (13) Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda; se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra bola. Dê uma espaço amostra para o experimento.
- (14) Três times A, B e C disputam um torneio de futebol. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Enumere os resultados do espaço amostra: resultados possíveis do torneio.
- (15) Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral correspondente.
- (16) Considerando dois eventos A e B de um mesmo espaço amostra S, expresse em termos de operações entre eventos:
- (16.1) A ocorre mas B não ocorre;
  - (16.2) Exatamente um dos eventos ocorre;
  - (16.3) Nenhum dos eventos ocorre.
- (17) Dois dados são lançados. Define-se os eventos: A = soma dos pontos obtidos igual a 9, e B = o ponto do primeiro dado é maior ou igual a 4. Determine os eventos A e B e ainda os eventos:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $\bar{A}$
- (18) Uma urna contém 12 moedas de igual tamanho, sendo 7 douradas e 5 prateadas. O experimento consiste em retirar, **sem** reposição e ao acaso, duas moedas desta urna. Calcular a probabilidade de que saiam:
- (18.1) Uma moeda dourada e uma prateada, nesta ordem.
  - (18.2) Uma moeda dourada e uma prateada.
  - (18.3.) Duas moedas douradas.
  - (18.4) Duas moedas de mesma cor.
- (19) Resolva o exercício **um** considerando a retirada das moedas **com** reposição.
- (20) sejam  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,8$  e  $P(A \cap B) = 0,15$ .
- (20.1) A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.



(20.2) Qual a  $P(\bar{B})$ ?

(20.3) Determine (a)  $P(A \cup B)$  (b)  $P(A \cap \bar{B})$  (c)  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  (d)  $P(\bar{A} \cap B)$

(21) Suponha que A e B sejam eventos tais que  $P(A) = x$ ,  $P(B) = y$  e  $P(A \cap B) = z$ . Exprima cada uma das seguintes probabilidades em termos de “x”, “y” e “z”.

(21.1)  $P(A \cup B)$  (21.2)  $P(\bar{A})$  (21.3)  $P(\bar{B})$  (21.4)  $P(A/B)$  (21.5)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(21.6)  $P(\bar{A} \cup B)$  (21.7)  $P(\bar{A} \cap B)$  (21.8)  $P(A \cap \bar{B})$  (21.9)  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  (21.10)  $P(\bar{A} / \bar{B})$

(22) Uma amostra de 140 investidores de um banco revelou que 80 investem em poupança, 30 investem no fundão e 10 investem na poupança e no fundão. Selecionado um destes investidores ao acaso, qual a probabilidade de que ele tenha investimentos na poupança ou no fundão?

(23) A probabilidade de um aluno A resolver uma questão de prova é 0,80, enquanto que a do aluno B é 0,60. Qual a probabilidade de que a questão seja resolvida se os dois alunos tentarem resolvê-la independentemente.

(24) Um atirador A tem probabilidade de  $1/4$  de acertar um alvo. Já um atirador B tem probabilidade de  $2/5$  de acertar o mesmo alvo. Se ambos atirarem simultaneamente e independentemente, qual a probabilidade de que:

(24.1) Ao menos um deles acerto o alvo e

(24.2) Ambos acertem o alvo?

(25) Sejam A e B dois eventos mutuamente excludentes. A probabilidade de ocorrência de ao menos um destes eventos é 0,52 e a probabilidade de A não ocorrer é 0,60. Calcule a probabilidade de B ocorrer?

(26) Sejam:  $P(A) = 0,50$ ;  $P(B) = 0,40$  e  $P(A \cup B) = 0,70$ .

(26.1) A e B são eventos mutuamente excludentes? Por que?

(26.2) Qual o valor de  $P(A \cap B)$ .

(26.3) A e B são eventos independentes? Por que?

(26.4) Quais os valores de  $P(A/B)$  e  $P(B/A)$ .

(27) Uma turma é composta de 9 alunos de Economia, 14 de Administração e 21 de Contábeis. Deseja-se eleger ao acaso uma comissão de dois alunos dessa turma. Calcule a probabilidade de que esta comissão seja formada por:

(27.1) Alunos só da Economia.

(27.2) Um aluno da Economia e outro de outro curso.

(27.3) Um aluno da Economia e outro da Contábeis.





(27.4) Dois alunos da Administração ou dois da Contábeis.

(28) Um produtor de parafusos verificou que em uma amostra de 100 parafusos 5 eram defeituosos. Numa segunda amostra de 200 parafusos ele encontrou 9 defeituosos. Você diria que a probabilidade de o próximo parafuso a ser produzido ter defeito é 0,05? Ou 0,045? Explique?

(29) Se o jogo um da loteria esportiva for marcado na coluna dois, então é possível afirmar que a probabilidade de acertar este jogo é de  $1/3$ ? Por que?

(30) Dois números são escolhidos ao acaso e sem reposição, dentre 6 números positivos e 8 negativos, e então multiplicados. Calcule a probabilidade de que o produto seja positivo.

(31) Os lugares de 6 pessoas em uma mesa circular são determinados por sorteio. Qual a probabilidade de Aristeu e Fariseu se sentem lado a lado?

(32) Suponha-se que são retiradas duas bolas, **sem** reposição, de uma caixa contendo 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. Determine:

(32.1) Todos os resultados possíveis e suas respectivas probabilidades.

(32.2) Todos os resultados possíveis e suas probabilidades supondo a extração **com** reposição da primeira bola retirada.

(33) Uma caixa contém 4 válvulas defeituosas e 6 perfeitas. Duas válvulas são extraídas juntas. Uma delas é ensaiada e se verifica ser perfeita. Qual a probabilidade de que a outra válvula também seja perfeita?

(34) Um dado é viciado, de tal forma que a probabilidade de sair um certo ponto é proporcional ao seu valor (por exemplo o ponto 4 é duas vezes mais provável do que o ponto dois). Calcular:

(34.1) A probabilidade de sair 5, sabendo-se que o ponto que saiu é ímpar.

(34.2) A probabilidade de sair um número par, sabendo que saiu um número maior do que 3.

(35) A probabilidade de que dois eventos independentes ocorram são  $p$  e  $q$ , respectivamente. Qual a probabilidade de que:

(35.1) Nenhum destes eventos ocorra.

(35.2) Pelo menos um destes eventos ocorra

(36) Calcular a  $P(A)$  sabendo que:  $P(AB) = 0,72$  e  $P(A\bar{B}) = 0,18$ .

(37) Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa e um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada; 30% das mulheres escolhem carne; 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: o freguês é homem

A: O freguês prefere salada



M: O freguês é mulher

B: O freguês prefere carne

Calcular:

(37.1)  $P(H)$ (37.2)  $P(A/H)$ (37.3)  $P(B/M)$ (37.4)  $P(A \cap H)$ (37.5)  $P(A \cup H)$ (37.6)  $P(M/A)$ 

(38) Uma companhia de seguros analisou a frequência com que 2000 segurados (1000 homens e 1000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados estão apresentados na tabela:

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850

(38.1) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?

(38.2) O uso do hospital independe do sexo do segurado?

(39) As probabilidades de 3 motoristas serem capazes de dirigir até em casa com segurança, depois de beber, são:  $1/3$ ,  $1/4$  e  $1/5$ . Se decidirem (erradamente) dirigir até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os 3 motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de que ao menos um chegue em casa a salvo?

(40) Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com 6 lâmpadas boas. Se as lâmpadas forem sendo testadas, uma a uma, até encontrar as duas queimadas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

(41) Num teste com duas marcas que lhe são apresentadas em ordem aleatória, um experimentador de vinhos faz três identificações corretas em três tentativas.

(41.1) Qual a probabilidade disto ocorrer, se na realidade ele não possui habilidade alguma para distinguir?

(41.2) E se a probabilidade de distinguir corretamente é de 90% em cada tentativa?

(42) Dados que dois acontecimentos A e B ocorrem independentemente com probabilidades p e q respectivamente, determine a probabilidade da ocorrência de um e somente um destes acontecimentos.

(43) Dois aparelhos de alarme funcionam de forma independente, detectando problemas com probabilidades de 0,95 e 0,90. Determinar a probabilidade de que dado um problema, este seja detectado por somente um dos aparelhos.

(44) Sejam A e B dois eventos. Suponha que  $P(A) = 0,40$ , enquanto  $P(A \cup B) = 0,70$ . Seja  $P(B) = p$ .

(44.1) Para que valor de “p”, A e B serão mutuamente excludentes?

(44.2) Para que valor de “p”, A e B serão independentes?



- (45) Um aparelho é escolhido ao acaso dentre 10 aparelhos, sendo que destes 6 funcionam sem falhas com uma probabilidade de 80% e os outros quatro funcionam sem falhas com uma probabilidade de 95%. Determinar a probabilidade de que o aparelho escolhido funcione sem falhas.
- (46) Três máquinas A, B e C apresentam respectivamente: 10%, 20% e 30% de defeituosos na sua produção. Se a três máquinas produzem igual quantidade de peças e retiramos duas peças ao acaso da produção global qual a probabilidade de que ambas sejam perfeitas?
- (47) Dentre 5 máquinas existem 3 de maior precisão que garantem um acerto de 95% e as duas restantes garantem um acerto de 75%. Escolhida uma máquina ao acaso qual a probabilidade de acerto?
- (48) Das peças fornecidas por duas máquinas automáticas 60% e 84%, respectivamente, são de alta qualidade. A produtividade da primeira máquina é o dobro do que a da segunda máquina. Retirada uma peça ao acaso de um lote produzido pelas duas máquinas verificou-se que ela era de alta qualidade. Determinar a probabilidade de que tenha sido produzida pela primeira máquina.
- (49) Uma caixa contém quatro moedas, uma das quais com duas caras. Uma moeda foi tomada ao acaso e jogada duas vezes, obtendo-se duas caras. Qual a probabilidade de que seja a moeda com duas caras?
- (50) Cada objeto manufaturado é examinado com probabilidade 0,55 por um fiscal e com probabilidade 0,45 por outro fiscal. A probabilidade de passar no exame de acordo com os fiscais é de 0,90 e de 0,98 respectivamente. Achar a probabilidade de que um objeto aceito tenha sido examinado pelo segundo fiscal.
- (51) Um carro pode parar por defeito elétrico ou mecânico. Se há defeito elétrico o carro para na proporção de 1 para 5 e, se mecânico, 1 para 20. Em 10% das viagens há defeito elétrico e em 20% mecânico, não ocorrendo mais de um defeito na mesma viagem, igual ou de tipo diferente. Se o carro para, qual a probabilidade de ser por defeito elétrico?
- (52) Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 pretas. Retira-se 3 bolas, sem reposição, e é definida a variável aleatória  $X$  = número de bolas pretas retiradas. Determine a distribuição de  $X$ .
- (53) Um dado é jogado 3 vezes. Seja  $X$  o número de pontos “um” que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de  $X$ .
- (54) Uma caixa contém 3 bolas brancas e uma preta. Uma pessoa vai retirar as bolas uma a uma, até conseguir apanhar a bola preta. Seja  $X$  o número de tentativas que serão necessárias. Determine a distribuição de probabilidade de  $X$  e calcule a média e a variância de  $X$ .



- (55) Dois tetraedros regulares têm suas faces numeradas de 1 a 4. Jogam-se ambos e somam-se os pontos das faces que ficarem voltadas para cima. Sabendo-se que a soma obtida é maior do que 4, determine a distribuição de probabilidade dessa soma.
- (56) Uma caixa contém 4 bolas brancas e 3 bolas pretas. Estabeleça a distribuição de probabilidade do número de bolas retiradas uma a uma e sem reposição até sair a última bola preta. Calcule a média, moda e desvio padrão dessa variável aleatória.
- (57) Uma pessoa joga 3 moedas e ganha R\$ 6,00 se obtiver só caras ou só coroas. Quanto deve pagar se perder, para que o jogo seja equitativo (não perca e nem ganhe)?
- (58) Em um certo empreendimento comercial, um empresário pode ter um lucro de R\$ 300 com uma probabilidade de 0,60 ou então um prejuízo de R\$ 100 com uma probabilidade de 0,40. Determinar o lucro médio do empreendimento.
- (59) O tempo  $T$ , em minutos, para que um operário processe certa peça é uma VAD com distribuição dada na tabela abaixo.

$t$	2	3	4	5	6	7
$f(t)$	0,10	0,10	0,30	0,20	0,20	0,10

- (59.1) Calcule o tempo médio de processamento.
- (59.2) Para cada peça processada o operário ganha um fixo de R\$ 2,00, mas se processa a peça em menos de 6 minutos, ganha R\$ 0,50 por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia de R\$ 1,00. Encontre a média e a variância de  $G$  = quantia ganha por peça.
- (60) No jogo de roleta, a pessoa escolhe um número entre 37 (de 0 a 36) e aposta  $x$ , sendo que, se ganhar, recebe  $35x$ . Quantas vezes se espera que jogue um jogador inveterado que aposta sempre R\$ 2,00 e um só número e dispõe de R\$ 50,00?
- (61) O conjunto de resultados igualmente possíveis de uma variável aleatória  $X$  é  $X(S) = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ . Represente em uma tabela a distribuição de  $X$  e calcule a expectância e a variância de  $X$ .
- (62) Seja  $f(x) = 0,1x$  a função de probabilidade da variável aleatória com conjunto de resultados  $X(S) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ . Represente a função de probabilidade em uma tabela e determine:  $E(x)$  e  $V(X)$ .
- (63) Um agente quer aplicar no mercado financeiro com o objetivo de fazer muitas aplicações mensais sucessivas. Ele dispõe de duas opções, mas usará a de maior rentabilidade. Ele deve optar entre:
- I - CDB com renda de 3% ao mês e sem riscos ou
  - II - Bolsa de valores com renda de 6% ao mês com probabilidade 0,46, 4% com probabilidade 0,45 ou prejuízo de 15% ao mês com probabilidade de 0,09.



Qual a opção mais lucrativa para o agente?

(64) Ao apostar R\$ 100 no preto de uma roleta um apostador pode ganhar R\$ 100 com probabilidade  $17/37$ , perder este mesmo valor com probabilidade de  $18/37$  ou não ganhar nada com probabilidade  $2/37$ . Utilize a expectância para determinar qual o lucro ou prejuízo esperado em 370 apostas deste mesmo valor?

(65) Pilhas de uma certa marca são acondicionadas de modo causal em embalagens de quatro pilhas. O produtor desta marca opera com probabilidade de 0,04 de uma pilha ser defeituosa.

(65.1) Calcule a probabilidade de que uma embalagem tomada ao acaso contenha:

- (a) Exatamente uma pilha defeituosa                      (b) Somente pilhas perfeitas  
(c) No máximo duas pilhas defeituosas.

(65.2) Quantas defeituosas deve-se esperar que existam, em média, por embalagem?

(66) Qual a probabilidade de obtermos exatamente duas caras em 8 lançamentos de uma moeda equilibrada?

(67) Uma turma tem 50 alunos, sendo 20 do sexo masculino. Deseja-se através de um sorteio que atribua a cada aluno da turma a mesma probabilidade de ser eleito, formar uma comissão de 4 alunos. Deseja-se também, determinar a probabilidade de a comissão resultante ter exatamente um aluno do sexo feminino. Você usaria o modelo binomial para calcular tal probabilidade? Por que?

(68) Qual a probabilidade de se obter duas ou menos faces 2 em 7 lançamentos de um dado equilibrado?

(69) A probabilidade de um parafuso produzido por uma empresa ser defeituoso é 0,03. Seja  $X$  a variável “número de parafusos defeituosos em envelopes de 500 parafusos”.

(69.1) Calcule  $E(x)$  e  $V(x)$ .

(69.2) Suponha que se compre 100 destes envelopes. Quantos defeituosos deve-se esperar?

(70) Uma distribuição binomial tem média igual a 3 e variância igual a 2. Calcule  $P(X = 2)$ .

(71) Em um experimento binomial com 3 provas, a probabilidade de exatamente 2 sucessos é 12 vezes a probabilidade de 3 sucessos. Determine o valor de “ $p$ ”.

(72) Em uma urna existem 18 bolas brancas e duas pretas. Calcule as probabilidades de retiradas 7 bolas, sair apenas uma bola preta, nos seguintes casos:

(72.1) As bolas são repostas na urna após as retiradas.

(72.2) As bolas não são repostas na urna após as retiradas.



(73) Uma loja tem um lote de 10 fechaduras, das quais 5 têm defeitos. Se uma pessoa comprar 3 fechaduras, qual a probabilidade de encontrar no máximo uma defeituosa?

(74) Se  $X$  tiver uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\alpha$ , e se  $P(X = 0) = 0,20$ , calcular  $P(X > 2)$ .

(75) As chegadas de petroleiros a uma refinaria a cada dia ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\alpha = 2$ . As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem por dia o excesso é enviado para outro porto.

(75.1) Qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

(75.2) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

(75.3) Qual o número médio e qual o desvio padrão do número de petroleiros que chegam por dia?

(76) Suponha que um comprador precisa decidir se vai aceitar ou não um lote de itens. Para tal, ele retira uma amostra de tamanho “ $n$ ” do lote e conta o número “ $x$ ” de defeituosos. Se  $x \leq a$ , o lote é aceito e se  $x > a$ , o lote é rejeitado. O número “ $a$ ” é fixado pelo comprador. Suponha que  $n = 19$  e  $a = 2$ . Determine a probabilidade de se aceitar o lote para as seguintes proporções de defeituosos no lote:

(76.1)  $p = 0,20$

(76.2)  $0,10$

(76.3)  $0,05$



## 5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

- (12)  $S = \{ cccc, ccek, cckc, ckcc, kccc, cckk, ckkc, kkcc, ckck, kckc, kcck, kkkc, kkck, ckck, ckck, kkkk \}$ ,
- (13)  $S = \{ BC, BK, VB, VV \}$ , onde  $C = \text{cara}$  e  $K = \text{coroa}$ .
- (14)  $S = \{ AA, ACC, ACBB, BB, BCC, BCAA, ACBA, BCAB \}$
- (15)  $S = \{ (c, 1), (c, 2), \dots, (c, 6), (k, 1), (k, 2), \dots, (k, 6) \}$ , onde  $c = \text{cara}$  e  $k = \text{coroa}$ .
- (16) (16.1)  $A \cap \bar{B} = A - B$       (16.2)  $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B - A \cap B$       (16.3)  $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$
- (17)  $A = \{ (3,6), (4, 5), (5, 4), (6,3) \}$   
 $B = \{ (4,1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6) \}$   
 $A \cup B = \{ (3, 6), (4,1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6) \}$   
 $A \cap B = \{ (4, 5), (5, 4), (6, 3) \}$   
 $\bar{A} = \text{São 32 pares excetuando-se os pares de A acima.}$
- (18) (18.1)  $35/132 = 26,52\%$  (18.2)  $70/132 = 53,03\%$  (18.3)  $42/132 = 31,82\%$  (18.4)  $62/132 = 46,97\%$
- (19) (19.1)  $35/144 = 24,31\%$  (19.2)  $70/144 = 48,61\%$  (19.3)  $49/144 = 34,03\%$  (19.4)  $74/144 = 51,38\%$
- (20) (20.1) Não, pois  $P(A \cap B) \neq \emptyset$  (20.2) 0,20 (20.3) (a) 0,95 (b) 0,15 (c) 0,05 (d) 0,65
- (21) (21.1)  $x + y - z$  (21.2)  $1 - x$  (21.3)  $1 - y$  (21.4)  $z/y$  (21.5)  $1 - z$  (21.6)  $1 - x + z$  (21.7)  $y - z$   
(21.8)  $x - z$  (21.9)  $1 - x - y + z$  (21.10)  $(1 - x - y + z) / (1 - y)$
- (22)  $10/14 = 5/7 = 71,43\%$
- (23)  $0,92 = 92\%$
- (24) (24.1)  $11/20 = 55\%$  (24.2)  $2/20 = 10\%$
- (25)  $0,12 = 12\%$
- (26) (26.1) Não, pois  $P(A) + p(B) \neq P(A \cup B)$  (26.2)  $0,20 = 20\%$  (26.3) Sim, pois  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$   
(26.4)  $P(A/B) = 0,50$  e  $P(B/A) = 0,40$
- (27) (27.1)  $72/1892 = 3,81\%$  (27.2)  $630/1892 = 33,30\%$  (27.3)  $378/1892 = 19,98\%$  (27.4)  $602/1892 = 31,82\%$
- (28) Não
- (29) Não
- (30)  $43/91 = 47,25\%$



(31)  $2/5 = 40\%$

(32) (a) Sem reposição

Resultados	Probabilidades
PP	6/56
PV	15/56
VP	15/56
VV	20/56
<b>Total</b>	<b>1</b>

(b) Com reposição

Resultados	Probabilidades
PP	9/64
PV	15/64
VP	15/64
VV	25/64
<b>Total</b>	<b>1</b>

(33)  $5/9 = 55,56\%$

(34) (34.1)  $5/9$

(34.2)  $2/3$

(35) (35.1)  $1 - p - q + pq = (1 - p)(1 - q)$

(35.2)  $p + q - pq$

(36)  $90\%$

(37) (37.1)  $75\%$  (37.2)  $20\%$  (37.3)  $30\%$  (37.4)  $15\%$  (37.5)  $92,50\%$  (37.6)  $7/13 = 53,85\%$

(38) (38.1)  $0,125$

(38.2) Há dependência

(39)  $0,40 = 40\%$  e  $0,60 = 60\%$

(40)  $3/28 = 10,71\%$

(41) (41.1)  $0,125 = 12,50\%$

(41.2)  $0,729 = 72,90\%$

(42)  $p(1 - q) + (1 - p)q$

(43)  $14\%$

(44) (44.1)  $p = 0,30$

(44.2)  $p = 0,50$

(45)  $86\%$

(46)  $64\%$

(47)  $87\%$

(48)  $10/17 = 58,82\%$

(49)  $4/7 = 57,14\%$

(50)  $49/104 = 47,12\%$

(51)  $2/3 = 66,67\%$

(52)

x	0	1	2	3
f(x)	1/56	15/56	30/56	10/56

(53)

x	0	1	2	3
f(x)	125/216	75/216	15/216	1/216





(54)

x	1	2	3	4
f(x)	1/4	1/4	1/4	1/4

$\mu = 2,50$        $\sigma^2 = 1,25$

(55)

x	5	6	7	8
f(x)	0,40	0,30	0,20	0,10

(56)

x	3	4	5	6	7
f(x)	1/35	3/35	6/35	10/35	15/35

$\mu = 6$        $m_o = 7$   
 $\sigma^2 = 1,20$        $\sigma = 1,10$

(57)

x	6	y	$\mu = 6/4 + 3y/4 = 0 \Rightarrow y = -2$
f(x)	1/4	3/4	Ele deve pagar R\$ 2,00

(58) R\$ 140

(59) (59.1)  $\mu = 4,60$

(59.2)

g	4,0	3,5	3,0	2,5	2
f(g)	0,10	0,10	0,30	0,20	0,30

$\mu = 2,75$        $\sigma^2 = 0,4125$

(60) 925 vezes.

(61)

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$\mu = 2$        $\sigma^2 = 2$

(62)

x	1	2	3	4
f(x)	0,1	0,2	0,3	0,4

$\mu = 3$        $\sigma^2 = 1$

(63) A bolsa com expectativa de renda de 3,21% ao mês contra os 3% ao mês do CDB.

(64) Prejuízo de R\$ 1000

(65) (65.1) (a) 14,16%      (b) 84,93%      (c) 99,98%      (65.2) 16%

(66) 10,94%

(67) Não

(68) 90,42%

(69) (69.1)  $E(X) =$        $V(x) = 14,55$       (69.2) 1500

(70) 23,41%

(71)  $p = 1/5 = 0,20$

(72) (72.1) 37,20%      (72.2) 47,89%

(73) 50%



(74) 21,90%

(75) (75.1) 14,29%

(75.2) 2

(75.2) 2

(76) (76.1) 23,69%

(76.2) 70,54%

(76.3) 93,35%



## 6. REFERÊNCIAS

- [BUS86] BUSSAB, Wilton O, MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1986.
- [COS74] COSTA NETO, Pedro Luís de Oliveira, CYMBALISTA, Melvin. *Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1977.
- [FEL68] FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (vol. 1)*. John New York: Wiley & Sons, 1968. 509 p.
- [HAZ77] HAZZAN, Samuel. *Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidades*. São Paulo: Atual, 1977.
- [HIL88] HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Campus e Editora da Universidade de São Paulo, 1988.
- [LIP74] LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria e Problemas de Probabilidade*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 225 p.
- [MAR87] MARKLAND, Robert E., SWEIGART, James R. *Quantitative Methods: Applications to Managerial Decision Making*. New York: John Wiley & Sons, 1987. 827p.
- [MAS90] MASON, Robert D., DOUGLAS, Lind A. *Statistical Techniques in Business And Economics*. IRWIN, Boston, 1990.
- [MEY78] MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à Estatística*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.
- [MIL90] MILLER, Charles D., HEEREN, Vern E., HORNSBY Jr., E. John. *Mathematical Ideas*. USA: Harper Collins Publishers, 1990.
- [REA93] *The Statistics Problem Solver*. Research and Education Association, Piscataway, New Jersey, 1993.
- [ROT91] ROTHENBERG, Ronald I. *Probability and Statistics*. Orlando (FL), Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, 1991.
- [ROS85] ROSS, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Orlando (FL): Academic Press, 1985, 502 p.
- [TRI20] TRIVEDI, Kishor Shridharbhai. *Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications*. New York: John Wiley & Sons, 2000. 830 p.