

# Mat2248 Probabilidade 1

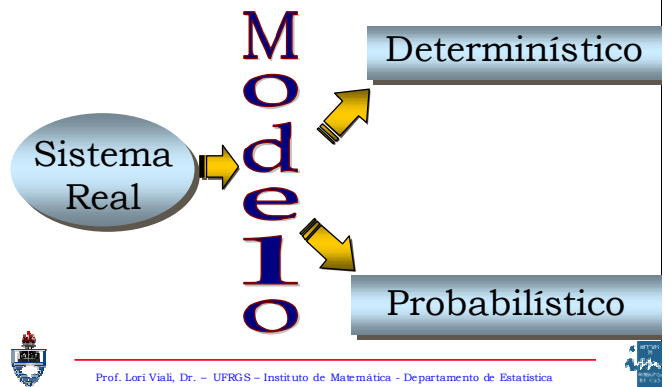
Prof. Lorí Viali, Dr.

[viali@mat.ufrgs.br](mailto:viali@mat.ufrgs.br)

<http://www.mat.ufrgs.br/~viali/>

1/5

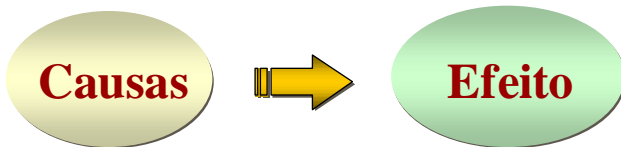
## Tipos de Modelos



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



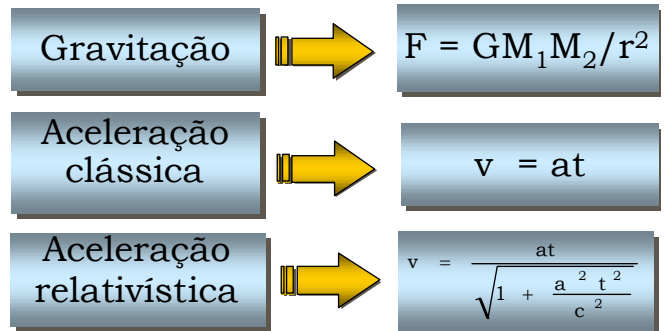
## Modelo Determinístico



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



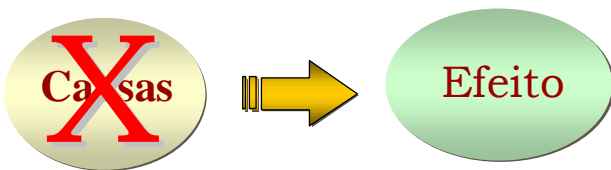
## Exemplos



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



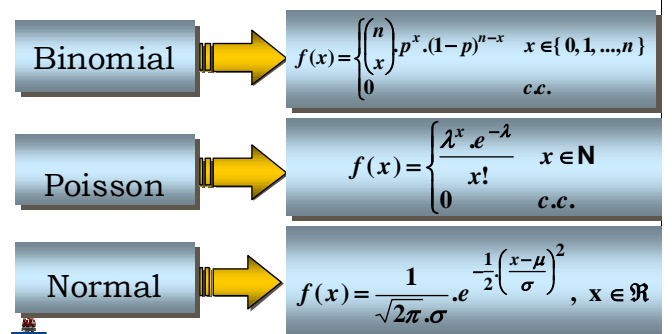
## Modelo Probabilístico



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplos



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Características

1 Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

3 Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de frequências.

2 Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Exemplos

$E_1$ : Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>2</sub>:** Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>3</sub>:** Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a sequência de caras e coroas;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>4</sub>:** Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>5</sub>:** Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>6</sub>:** Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



**E<sub>7</sub>:** Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Espaço Amostra(1)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

# Exemplos



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



$$S_3 = \{cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckkc, kcck, ckck, kckc, kkcc, kkck, kckk, ckkk, kkkk\}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



$$S_4 = \{t \in \mathbf{R} / t \geq 0\}$$



$$S_5 = \{1, 2, 3, \dots\}$$



$$S_6 = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$$



$$S_7 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$



## Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.



## Exemplo

Seja  $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$  um espaço amostra.

Então são eventos:

$$A = \{ 1, 3, 5 \} \quad B = \{ 6 \}$$

$$C = \{ 4, 5, 6 \} \quad D = \emptyset \quad E = S$$



## Ocorrência de um evento

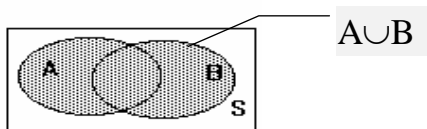
Seja  $E$  um experimento com espaço amostra associado  $S$ . Diremos que o evento  $A$  ocorre se realizado  $E$  o resultado é um elemento de  $A$ .



# Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.

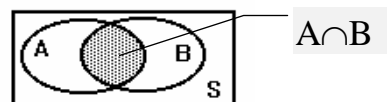


Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A interseção B, A vezes B ou A e B, se e só se A ocorre e B ocorre.

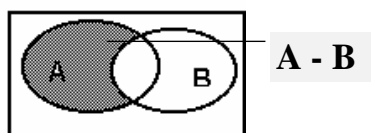


Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.

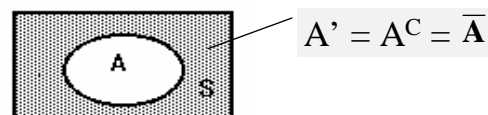


Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.

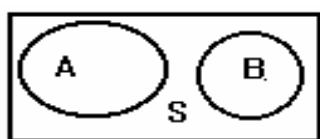


Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Propriedades das operações entre eventos



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Leis Comutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

## Leis Associativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

## Leis Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

## Outras Propriedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

$$\overline{A} \cap B = B - A$$

## Conceitos de Probabilidade

 CLÁSSICO

 FREQUÊNCIAL

 AXIOMÁTICO

## CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



## Exemplo

Qual a probabilidade de ganhar no Toto-Bola?

## Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



$$\begin{aligned} P(\text{Toto_Bola}) &= \\ &= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} = \\ &= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0,000031\% \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Frequência Relativa

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta "FACE SEIS" 18 vezes.

Então, a frequência relativa de "FACE SEIS" é:



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



$$\begin{aligned} fr_6 &= \\ &= \frac{\text{número de vezes que "f_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}} \\ &= \frac{18}{120} = 0,15 = 15\% \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr_A$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística





## Conceito Axiomático

$P(A)$  é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

- (1)  $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2)  $P(S) = 1$
- (3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se  $A \cap B = \emptyset$



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Conseqüências dos Axiomas (Teoremas)

- (1)  $P(\emptyset) = 0$
- (2)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- (3)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

- (4)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (5)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Probabilidade Condicionada

### Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Suponha que desta urna são retiradas “duas” fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

$A = \{ \text{a primeira ficha é branca} \}$

$B = \{ \text{a segunda ficha é branca} \}$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Então:

$$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$$

$$P(B) = ?/49$$

Neste caso, não se pode avaliar  $P(B)$ , pois para isto é necessário saber se  $A$  ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Se for informado que  $A$  ocorreu, então a probabilidade de  $B$ , será:

$$P(B/A) = 9/49 = 0,1837 = 18,37\%$$



Observe a notação



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Esta representação é lida:

$P$  de  $B$  dado  $A$ ;

$P$  de  $B$  dado que  $A$  ocorreu;

$P$  de  $B$  condicionada a  $A$ .



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Definição:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Mas:

Se  $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$  então:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Também:

Se  $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$  então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Esse resultado é conhecido como:

## Teorema da multiplicação



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Independência

Dois eventos  $A$  e  $B$  são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

eventos de um mesmo espaço amostra  $S$ , formam uma partição deste espaço se:

- (1)  $P(A/B) = P(A)$
- (2)  $P(B/A) = P(B)$
- (3)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



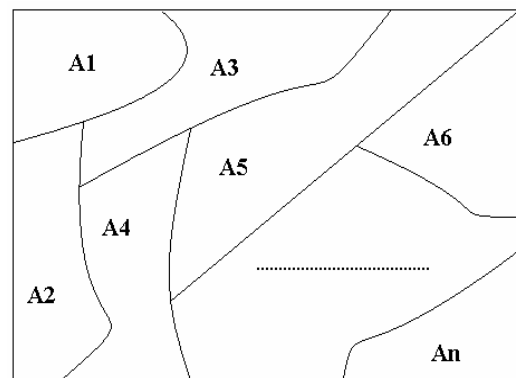
Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



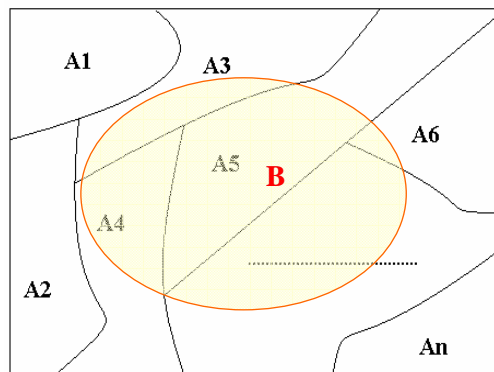
- (1)  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$
- (2)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ , para todo  $i \neq j$
- (3)  $P(A_i) > 0$ , para todo  $i$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



# Teorema da probabilidade total

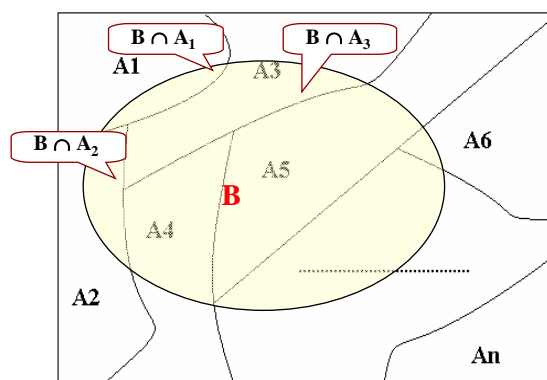


Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

P(B) será então:

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)] \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \\ &= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i) \end{aligned}$$

Assim:  $P(B) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

## Exemplo

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina “A” participa com 20% da produção, a “B” com 30% e a “C” com 50%.

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.



## Solução

Tem-se:

$$P(A) = 20\% \quad P(D/A) = 5\%$$

$$P(B) = 30\% \quad P(D/B) = 3\%$$

$$P(C) = 50\% \quad P(D/C) = 1\%$$

$$P(D) = \sum P(A_i) \cdot P(D/A_i)$$

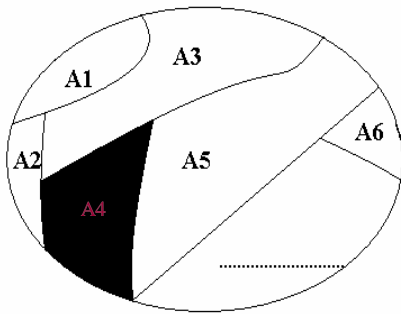


Então:

$$\begin{aligned} P(D) &= \\ &= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = \\ &= 0,20 \cdot 0,05 + 0,30 \cdot 0,03 + 0,50 \cdot 0,01 = \\ &= 0,01 + 0,009 + 0,005 = \\ &= 0,024 = 2,40\% \end{aligned}$$



## Teorema de Bayes



Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos “ $A_i$ ” (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer “ $B$ ”.



Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$\begin{aligned} P(A_i / B) &= \\ &= P(A_i \cap B) / P(B) = \\ &= P(A_i) \cdot P(B / A_i) / P(B) \end{aligned}$$



Na expressão:

$$P(A_i / B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i) / P(B)$$

o valor de  $P(B)$  (denominador) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total.



## Exemplo

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?



# Solução

Tem-se:

$$P(A) = 20\% \quad P(D/A) = 5\%$$

$$P(B) = 30\% \quad P(D/B) = 3\%$$

$$P(C) = 50\% \quad P(D/C) = 1\%$$

$$P(D) = 2,40\%$$

Então:

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \\ &= \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} = \\ &= \frac{0,20 \cdot 0,05}{0,20 \cdot 0,05 + 0,30 \cdot 0,03 + 0,50 \cdot 0,01} = \\ &= \frac{0,01}{0,024} = 41,67\% \end{aligned}$$

# Revisão de Combinatória

## Fatorial

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Obs.: (i)  $0! = 1$

(ii)  $n! = n \cdot (n - 1)!$

## Princípio Fundamental da Contagem

Suponha que se possa fazer “n” escolhas independentes com:

- $m_1$  maneiras de fazer a escolha 1,
- $m_2$  maneiras de fazer a escolha 2,
- .....
- $m_n$  maneiras de fazer a escolha n.

Então existem  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$  maneiras diferentes de fazer a seqüência inteira de escolhas.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplo

Quantos números distintos de dois algarismos existem?

$$m_1 \cdot m_2 = 9 \cdot 9 = 81$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Permutações

Uma permutação é uma das possíveis maneiras de arranjar, ou ordenar, um conjunto de objetos.

O número de permutações de “r” objetos distintos é dado por:

$$P_r = r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = r!$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplo

Dado o conjunto { a, b, c, d }. O número de permutações possíveis é:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Arranjos

O número de arranjos de “n” objetos distintos, tomados “r” a cada vez, onde  $r \leq n$ , é dado por:

$$A(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Arranjos

O número de arranjos pode ser expresso em função do fatorial da seguinte forma:

$$A(n, r) = n! / (n - r)!$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística





## Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$$A(52, 5) = 52! / (52 - 5)! = 52.51.50.49.48 = 311\ 875\ 200$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Observação:

A PERMUTAÇÃO é um caso particular do ARRANJO, quando  $n = r$ .

$$A(n, r) = n! / (n - r)! = A(n, n) = n! / (n - n)! = n! / 0! = n!$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Arranjo Completo

Se “r” elementos forem tomados de “n”, onde são permitidas as repetições, isto é, o mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez, então o número de arranjos é dado por:

$$AC = n^r$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e com reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$$AC(52, 5) = 52^5 = 418\ 195\ 493$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Combinações

O número de combinações, ou subconjuntos, de “n” objetos tomados em grupos de “r”, onde  $r \leq n$  é dado por:

$$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Exemplo

Quantos são os cartões diferentes no jogo da Mega Sena?

$$C(n, r) = C(60, 6) = 60! / 6!(60 - 6)! = 50\ 063\ 860$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Relação entre os três principais resultados

$$A(n, r) = P_r \cdot C(n, r)$$

Pois

$$\begin{aligned} P_r \cdot C(n, r) &= r! \cdot [n! / r!(n - r)!] = \\ &= n! / (n - r)! = A(n, r) \end{aligned}$$

