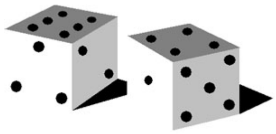
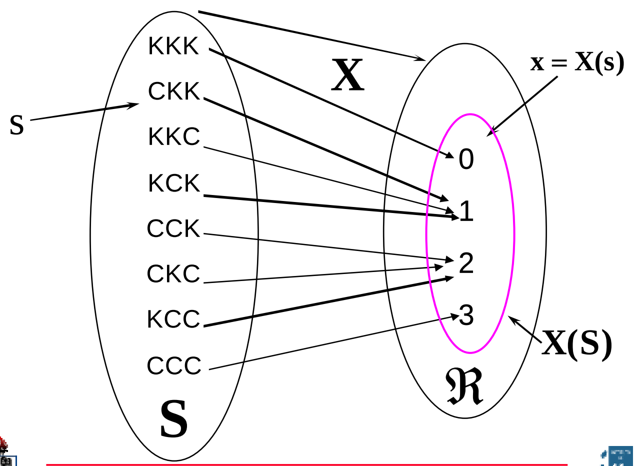


Mat2248 Probabilidade I

2

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Variável Aleatória e VAD



Variável Aleatória

Uma função **X** que associa a cada elemento de S (s ∈ S) um número real x = X(s) é denominada **variável aleatória**.

Conjunto de valores

O conjunto formado por todos os valores "x", isto é, a imagem da variável aleatória X, é denominado de conjunto de valores de X.

$$\mathbf{X(S) = \{ x \in \Re \ / \ X(s) = x \}}$$

Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – X(S) – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.

Variável Aleatória Discreta

A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $x_i \in X(S)$ o número $f(x_i) = P(X = x_i)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$f(x_i) \geq 0$, para todo "i"

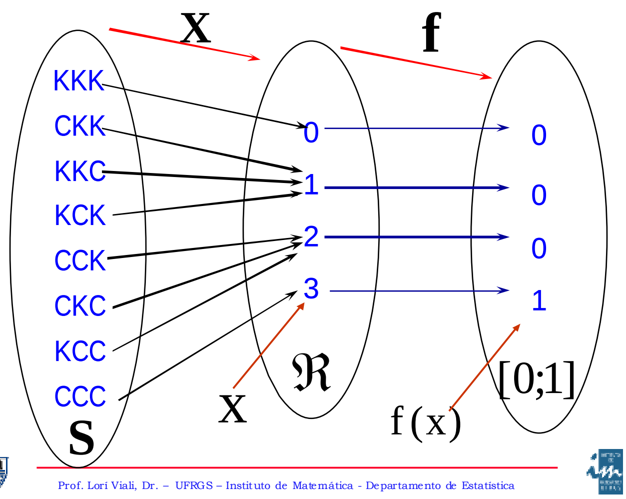
$\sum f(x_i) = 1$

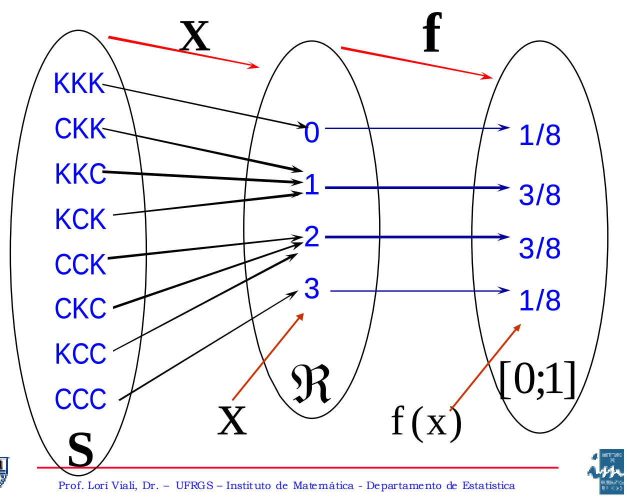
A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares $[x_i, f(x_i)]$ para $i = 1, 2, 3, ...$ é denominada de distribuição de probabilidade da VAD X.

Exemplo

Suponha que uma moeda equilibrada é lançada três vezes. Seja X = "número de caras". Então a distribuição de probabilidade de X é:





Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então X = "soma do par" é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:

Como X((a, b)) = a + b, o conjunto de valores de X é dado por:

$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12\}$

A função de probabilidade f(x) = P(X = x), associa a cada $x \in X(S)$, um número no intervalo [0; 1] dado por:

$f(x) = P(X = x) = P(X(s) = x) =$

$= P([x \in X(S) / X(s) = x\})$

Desta forma:

$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$

$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$

....

$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$

$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$

A distribuição de probabilidade será:

A distribuição de probabilidade de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

Representação de uma Distribuição de Probabilidade

Através de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama

Tabela

Seja X = "número de caras", obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a da tabela ao lado.

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1

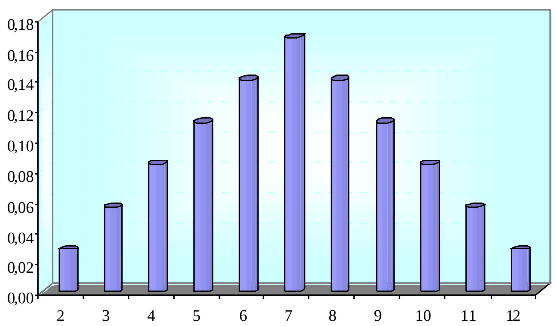
Expressão Analítica

Considere X = "soma do par", no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$\mathbf{f} : \mathbf{X(S)} \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow \begin{cases} (x - 1)/36 & \text{se } x \leq 7 \\ (12 - x + 1)/36 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

Diagrama



VAD – Caracterização

(a) Expectância, valor esperado (*Expectation*)

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum xP(X = x)$$

(b) Variância (*Variance*)

$$\sigma^2 = \sum f(x)(x - \mu)^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2 =$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

(*Standard Deviation*)

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2} = \sqrt{E(X^2)\text{-}E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

(*Variation Coeficient*)

$\gamma = \sigma/\mu$

Definições:

Seja X uma VA. O momento de ordem “k” de X é o valor $E(X^k) = \mu_k$, se esse valor convergir.

Obs.: A expectância é o primeiro momento.

Seja X uma VA. O momento central de ordem “k” de X é o valor $E[(X - E(X))^k] = E[(X - \mu)^k]$, se esse valor convergir.

Obs.: (i) A variância é o segundo momento central;

(ii) O primeiro momento central é sempre zero;

(iii) O terceiro momento central é utilizado para determinar a assimetria de uma distribuição;

(iv) O quarto momento central é utilizado na determinação da curtose de uma distribuição.

Se X é um VAD então o k-ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k f(x_i)$$

e o k-ésimo momento central de X é obtido por: $\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^k f(x_i)$

Considerando que o momento de ordem “k” de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado. Tem-se, então:

(a) Expectância, valor esperado

$\mu_1 = E(X)$

(b) Variância

$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) – E(X)^2 = \mu_2 – \mu_1^2$

(c) Assimetria

$\gamma_1 = [\mu_3 – 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3$

(v) Curtose

$\gamma_2 = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 – 3 =$

$= [\mu_4 – 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 – 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3$

Exemplo

Calcular o valor esperado, a variabilidade da variável X = "número de caras" no lançamento de quatro moedas honestas.

Cálculos

x	f(x)	x.f(x)	$x^2f(x)$	$x^3f(x)$	$x^4f(x)$
0	1/16	0	0	0	0
1	4/16	4/16	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16	48/16	96/16
3	4/16	12/16	36/16	108/16	324/16
4	1/16	4/16	16/16	64/16	256/16
Σ	1	2	5	14	42,5

Tem-se:

$\mu_1 = 2$; $\mu_2 = 5$; $\mu_3 = 14$ e $\mu_4 = 42,5$

Assim:

(i) $E(X) = \mu_1 = 2$ caras

(ii) $\sigma^2 = \mu_2 – \mu_1^2 = 5 – 4 = 1$ cara

(iii) $\gamma_1 = [\mu_3 – 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3 =$

$=14 – 3.2.5 + 2.8 = 30 – 30 = 0$

(iv) Curtose

$\gamma_2 = [\mu_4 – 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 – 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3$

$= 42,5 – 4.2.14 + 6.4.5 – 3.16 – 3 =$

$= 42,5 – 112 + 120 – 48 – 3 = 2,5 – 3$

$= -0,50$

Outros Resultados

Moda

m_o = 2 caras

Mediana

m_e = 2 caras

Propriedades

Da expectância ou valor esperado

(i) Linearidade

$E(aX + b) = aE(X) + b$

(ii) Lei da espectativa total, ou lei da espectativas iteradas ou lei da torre

$E[E(X/Y)] = E(X)$

(iii) Não multiplicativa

$E(XY) \neq E(X)E(Y)$, em geral

(iv) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Da variância

(i) $V(a) = 0$

(ii) $V(aX + b) = a^2V(X)$

(iii) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ se X e Y forem independentes.

Exercício

Três dados honestos são lançados. Seja X = produto dos resultados. Determine a distribuição de X e calcule os momentos até a quarta ordem.

A partir dos momentos, determinar:

(i) A expectância

(ii) A variância

(iii) A assimetria

(iv) A curtose

A Função de Distribuição (FD)

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua). A função de distribuição (acumulada) ou simplesmente "função de repartição" é definida por: $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriedades da FD

(a) $0 \leq F(x) \leq 1$;

(b) $F(x_1) \leq F(x_1)$ se $x_1 < x_2$

(c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(d) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Determinação de probabilidades a partir da FD

(i) $P(a < X \leq b) = F(b) – F(a)$;

(ii) $P(X > a) = 1 – F(a)$ e

(iii) $P(X < b) = F(b)$

VAD e FD

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) então a FD é a função em escada dada por:

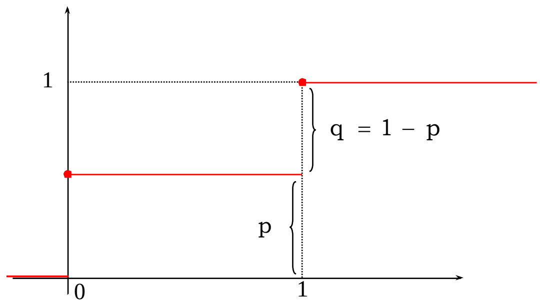
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Exemplo:

Seja X = número de caras no lançamento de uma moeda. Então a FD de X é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

A Função de Distribuição



Observação:

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) com FD F(x), então:

$$P(X = x_i) = f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exercício:

Uma fonte de informação gera símbolos ao acaso a partir de um alfabeto de quatro letras { a, b, c, d } com probabilidades f(a) = ½, f(b) = ¼ e f(c) = f(d) = 1/8. Um esquema codifica esses símbolos em binário da seguinte forma: a → 0, b → 10, c → 110, d → 111. Seja X a VA que representa o tamanho do código, isto é, o número de dígitos binários (bits).

(a) Qual é o conjunto de valores de X?

(b) Assumindo que a geração dos símbolos são independentes, encontre: P(X = 1), P(X = 2), P(X = 3) e P(X > 3).

(c) Determine a FD de X.

(d) Represente a FD graficamente.

A Função Geradora de Momentos (fgm)
(Moment Generating Function)

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua). A função geradora de momentos (fgm) de X, é dada por: $\phi(t) = E(e^{tX})$, para todo t, $-\infty < t < \infty$, em que a expectância é finita.

Observações:

Se X é uma VAD então a fgm de X é dada por:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} f(x_j)$$

Exemplo:

Suponha que uma VAD assuma valores no conjunto {1, 2, ..., n } com probabilidade f(x) = 1/n. Determine a fgm de X.

Solução:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{tj}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(e^t + e^{2t} + \ldots + e^{nt}) = \frac{e^t(e^{nt}-1)}{n(e^t-1)}$$

Observações:

Sabe-se que:

$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! \ldots$ e que essa série converge para qualquer x.

Assim:

$e^{tx} = 1 + tx + (tx)^2/2! + (tx)^3/3 + \ldots$

Assim:

$\phi(t) = E(e^{tX}) = E(1 + tX + (tX)^2/2! + \ldots) =$

$= 1 + tE(X) + t^2E(X^2)/2! + t^3E(X^3)/3! + \ldots$

Então:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k E(X^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!}$$

Derivando $\phi(t)$ em relação a t tem-se:

$\phi'(t) = E(X) + tE(X^2) + t^2E(X^3)/2! + \ldots$

Assim:

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}E(X^k)}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k t^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^{k+1})$$

Tem-se:

$$\phi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^{k+1}) = E(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{K+1} t^k}{k!}$$

Fazendo t = 0, segue que: $\phi'(0) = E(X)$.

Assim, prova-se, que a primeira derivada da fgm, calculada em t = 0, fornece a expectância da VA X.

Calculado a segunda derivada em relação a t, tem-se:

$\phi''(t) = E(X^2) + tE(X^3) + \ldots + t_{k-2}E(X^k)/(k-2)! + \ldots$

Fazendo t = 0, segue que:

$\phi''(0) = E(X^2)$

Ou seja, a segunda derivada da fgm, em t =0, é igual ao momento de segunda ordem.

De modo geral, tem-se:

$\phi^{(n)}(t) = E(X^n) + tE(X^{1+n}) + \ldots + t_{k-n}E(X^k)/(k-n)! + \ldots$

Fazendo t = 0, segue que:

$\phi^{(n)}(0) = E(X^n)$

Exemplo:

Suponha que uma VAD assuma valores no conjunto {1, 2, ..., n} com probabilidade f(x) = 1/n. Sabendo que a fgm de X é: $\phi(t) = \frac{e^t(e^{nt}-1)}{n(e^t-1)}$

Determine a expectância e a variância de X.

Solução:

$$\phi(t) = \frac{1}{n}(e^t + e^{2t} + \ldots + e^{nt}) = \frac{e^t(e^{nt}-1)}{n(e^t-1)}$$

Derivando essa expressão, tem-se:

$$\phi'(t) = \frac{1}{n}(e^t + 2e^{2t} + \ldots + ne^{nt})$$

Substituindo t por zero, tem-se:

$$\mu_1 = \phi'(0) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n+1}{2}$$

$$\phi'(t) = \frac{1}{n}(e^t + 2e^{2t} + \ldots + ne^{nt})$$

Derivando a expressão acima, uma segunda vez, segue que:

$$\phi''(t) = \frac{1}{n}(e^t + 4e^{2t} + \ldots + n^2e^{nt})$$

Substituindo t por zero, tem-se:

$$\mu_2 = \phi''(0) = \frac{1}{n}(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

Exercício:

Suponha que o momento de uma VAD seja dado por: $E(X^k) = 0{,}8$ para k = 1, 2, ...

(a) Encontre a fgm.

(b) Encontre P(X = 0) e P(X = 1) .

Solução:

$\phi(t) =$

$= 1 + tE(X) + t^2E(X^2)/2! + t^3E(X^3)/3! + \ldots =$

$= 1 + 0,8t + 0,8t^2/2! + 0,8t^3/3! + \ldots. =$

$= 1 + 0,8(t + t^2/2! + t^3/3! + \ldots) =$

$= 1 + 0,8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = 0,2 + 0,8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} =$

$= 0,2 + 0,8e^t$

(a) Por definição, tem-se:

$$\phi(t) = \sum e^{tx} f(x) = 0,2 + 0,8e^t$$
$$= 0,2e^{0.t} + 0,8e^{1.t}$$

Assim:

$P(X = 0) = f(0) = 0,2$ e

$P(X = 1) = f(1) = 0,8$

A Função Característica (fc)

(Characteristic Function)

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua). A função característica (fc) de X, é a função complexa:

$$\varphi : R \to C$$
$$t \to E(e^{itX})$$

VAD

No caso discreto a função característica é dada por: $\varphi(t) = E(e^{itX}) = \Sigma e^{itx} f(x)$.

Note-se que $\varphi(t)$ é obtida pela substituição de t por it em $\phi(t)$ se ela existir.

Assim a função característica apresenta todas as propriedades da fgm.

Propriedade

$$|\ \varphi(t)\ | = |\ E(e^{itX})\ | = |\ \Sigma e^{itx} f(x)\ | \le$$
$$\le \Sigma\ |\ e^{itx} f(x)\ | = \Sigma\ |\ f(x)\ | = 1$$

Assim a função característica sempre existe mesmo se a fgm não existir.

A partir da função característica pode ser mais simples a obtenção dos momentos de qualquer ordem. Uma relação útil é obtida pela substituição de e^{itx} pelo seu desenvolvimento em série de potências.

$$e^{itx} = 1 + itx + \frac{(itx)^2}{2!} + \frac{(itx)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$$

Assim

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k (it)^k}{k!}$$

A função característica também pode ser utilizada na determinação dos momentos de uma VA. Supondo que o n-ésimo momento exista a função característica pode ser diferenciada n vezes de modo que:

$$E(X^n) = i^n \varphi^{(n)}(0)$$

Observações:

(i) A função de distribuição é determinada unicamente pela função característica.
(ii) Dados as FD $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... com as funções características correspondentes $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... então $F_n(x) \to F(x)$ nos pontos de continuidade de $F(x)$ se e só $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ para cada t.

Exemplo:

Seja X uma VAD com valores: x_1 = -1 e x_2 = 1 e com probabilidades $f(x_1) = f(x_2) = 0{,}5$.

Determinar a função característica de X.

Solução:

Tem-se:

$$\varphi(t) = 0{,}5e^{-it} + 0{,}5e^{it} =$$
$$= 0{,}5(e^{-it} + e^{it}) =$$
$$= \cos(t)$$

Referências

http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/charact.htm
http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/inverse.htm
http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_entropy_probability_distribution (Entropia)
http://www.mtm.ufsc.br/~andsol/portugues/mat/00fun2/provas.html