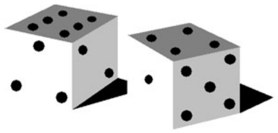


Mat2248 - Probabilidade I
3

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Modelos Discretos de Probabilidade

- Bernoulli
- Binomial
- Binomial Negativa ou Pascal
- Geométrica
- Hipergeométrica
- Uniforme
- Poisson

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Bernoulli

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

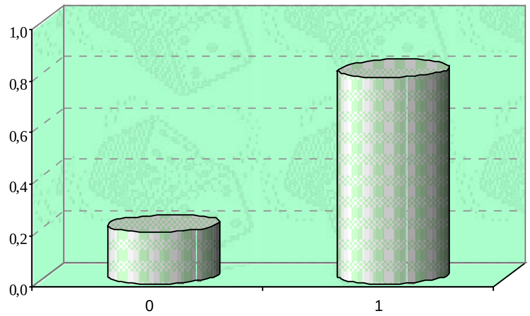
$X(S) = \{0, 1\}$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

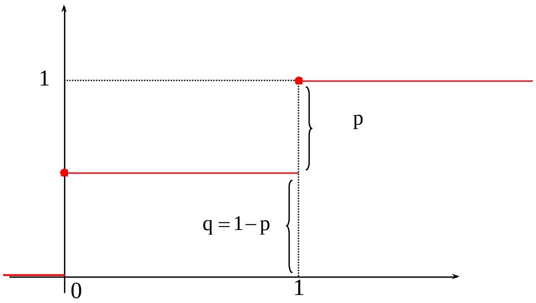
A Função de Probabilidade (fp)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = “o número de circuitos rejeitados em um teste”. Determine a distribuição de X.

Como se trata de um único teste, a variável X é Bernoulli com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Binomial

Experimento

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo q = 1 – p.

A VAD definida por X = “número de vezes que A ocorreu nas ‘n’ repetições de E” é denominada BINOMIAL.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

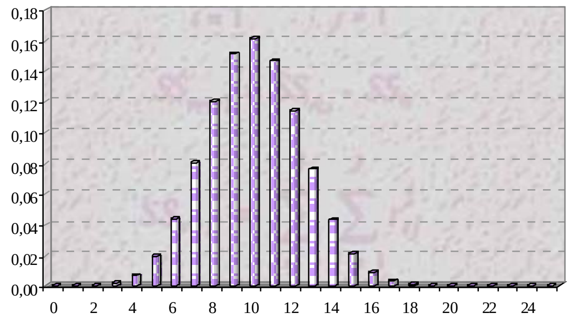
$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Probabilidade (fp)



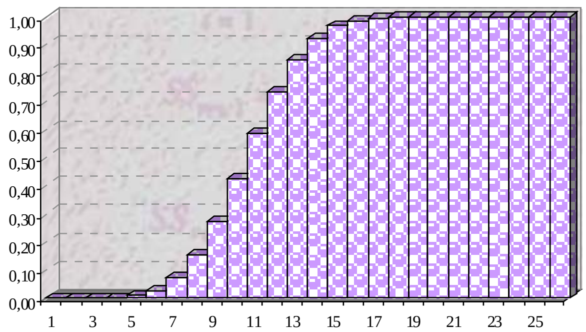
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{se } 0 \le x \le n \\ 1 & \text{se } x > n \end{cases}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Função de Distribuição



Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$

$$= -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

Assim:

$$E(X) = np$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$

Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = "o número de circuitos rejeitados em 10 testes". Determine a distribuição de X.

Como se tratam de 10 testes a variável X é Binomial com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}(0,1)^x.(0,9)^{10-x}$$

$$\text{para } x = 0, 1, 2, ..., 10$$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Tem-se:

n = 10 e p = 5/100 = 0,05

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,05^0\, 0,95^{10} =$$

$$= 59,87\%$$

Tem-se:

n = 10 e p = 5/100 = 5%

Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}.(0{,}5)^0.(0{,}95)^{10} =$$

$$= 59{,}87\%$$

Geométrica

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento

A distribuição Geométrica, também, está relacionada com o experimento de Bernoulli. A diferença é que, agora, o que é fixado é o primeiro sucesso e não o número de tentativas, isto é, X = número de tentativas realizadas até se conseguir o primeiro sucesso.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

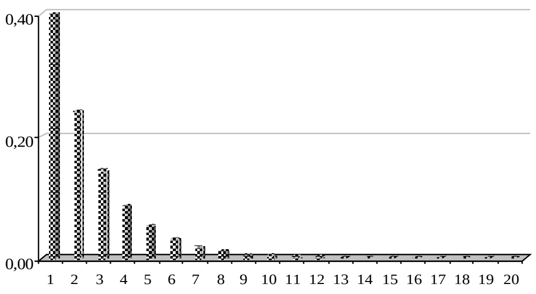
$$X(S) = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Representação Gráfica



A distribuição G(0,4)

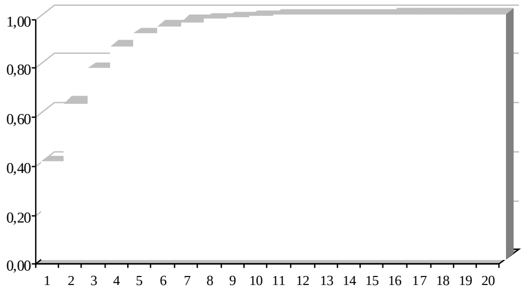
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1\text{-}q^x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição (FD)



A distribuição acumulada da G(0,4)

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.p\,q^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum x^2.p\,q^{x-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Suponha que um jogador de futebol converta 3 de cada 4 penalidades cobradas. Determine a probabilidade de ele tentar 4 penalidades até converter a primeira?

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Neste caso, tem-se: p = (3/4) = 75% e q = (1/4) = 25%

X = Número de tentativas antes do primeiro sucesso, é, então, uma G(0,75)

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$f(x) = P(X = x) = 0{,}75.0{,}25^{x-1}$

para x = 1, 2, 3, …

Portanto:

$f(4) = P(X = 4) = 0{,}75.0{,}25^3 =$

$= 1{,}17\%$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Binomial Negativa

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento

A distribuição binomial negativa é também conhecida como de **Pascal** ou de **Pólya**. Ela fornece o número de falhas até um número fixo de sucessos. Um experimento que apresenta uma distribuição binomial negativa satisfaz as seguintes condições:

Condições

- Cada tentativa apresenta apenas dois resultados: sucesso ou fracasso;
- O experimento consiste de uma seqüência de tentativas independentes;
- A probabilidade de sucesso permanece constante em todas as tentativas;

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

- O experimento continua até que um total de “r” sucessos sejam observados, onde “r” é um valor inteiro maior do que um, fixado de antemão.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

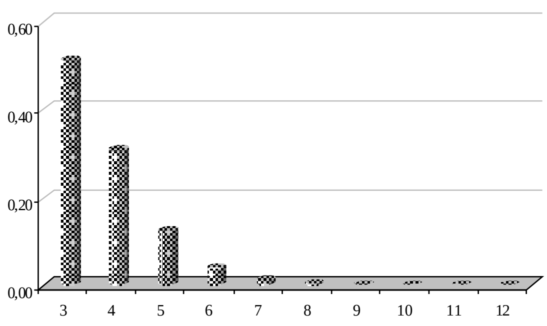
$X(S) = \{r, r + 1, r + 2, ...\}$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Representação Gráfica



A distribuição BN(3; 0,4)

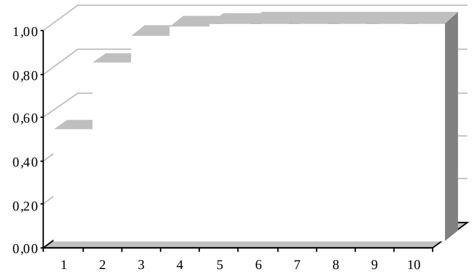
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < r \\ \sum_{k=r}^{x} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} & \text{se } x \geq r \end{cases}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição (FD)



A distribuição acumulada da BN(1; 0,4)

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x.f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x.\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = \frac{r}{p}$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x^2.\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{rq}{p^2}$$

Exemplo

Suponha que um jogador de basquete acerte 4 a cada 5 lances livres. Seja X o número de tentativas para obter o terceiro acerto. Determine a probabilidade que ele precise fazer 6 lances, isto é, P(X = 6).

Neste caso, tem-se:

r = 3, p = (4/5) = 80% e q = 20%

X = Número de tentativas para obter o terceiro acerto é, então, uma BN(3; 0,8)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} 0{,}8^3 0{,}2^{x-3}$$

onde $x = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

$$f(6) = P(X = 6) = \binom{6-1}{2} 0{,}8^3 . 0{,}2^{6-3} =$$

$$= \binom{5}{2} 0{,}8^3 . 0{,}2^3 = 0{,}0410 = 4{,}10\%$$

Observações:

Existe uma relação entre a Binomial e a Pascal (Binomial Negativa). Na Binomial fixa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) e observa-se o número de sucessos.

Na Binomial Negativa fixa-se o número de sucessos e observa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) necessário para obter o número fixado de sucessos.

Hipergeométrica

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento:

A distribuição Binomial é deduzida com base em "n" repetições de um experimento de maneira independente (isto é, p = constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho "N", onde "r" apresentam uma característica "N – r" não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Neste caso a variável aleatória X = "número de objetos com a característica r em uma amostra de tamanho n", terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

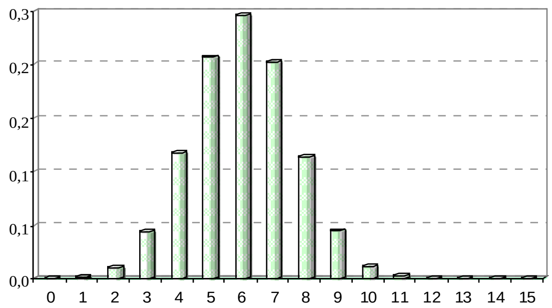
$$x : \text{máx}\{0, n-N+r\}, \ldots, \text{mín}\{r, n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Probabilidade (fp)
H(20; 15; 50)



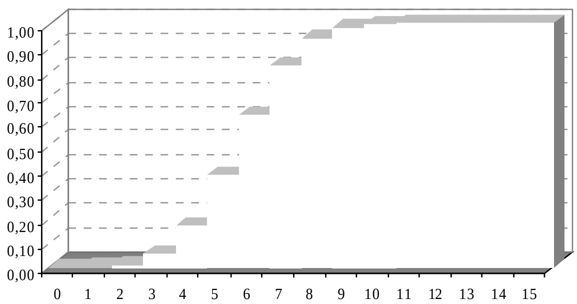
A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < j \\ \sum_{x=j}^{k} \dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{se } j \le x \le k \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

onde $j = \text{máx}\{0, \; n - N + r\}$

$k = \text{mín}\{r, \; n\}$

Função de Distribuição
H(20; 15; 50)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{Onde } p = \frac{r}{N}$$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Pela Hipergeométrica:

$N = 100$, $r = 5$, $n = 10$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 58{,}38\%$$

Pela Binomial:

$n = 10$ e $p = 5/100 = 5\%$

$$f(0) = P(X=0) = \binom{10}{0}.(0{,}05)^0.(0{,}95)^{10} =$$

$$=59{,}87\%$$

Uniforme

Experimento:

A distribuição uniforme é a mais simples das variáveis discretas. A variável assume os valores: x_1, x_2, ..., x_n sempre com igual probabilidade.

Definição:

Uma variável aleatória X que assume os valores x_1, x_2, ..., x_n é dita uniforme discreta se todos os valores ocorrem com a mesma probabilidade, isto é, $f(x_i) = 1/n$.

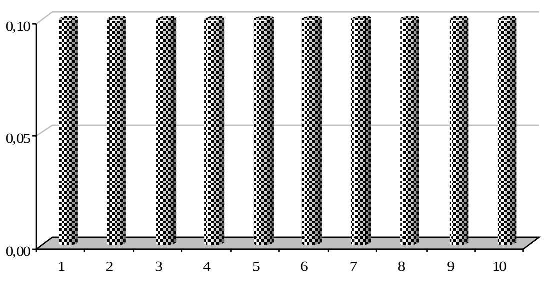
Conjunto de Valores

$X(S) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x_i) = P(X = x_i) = 1/n$$

A Representação Gráfica

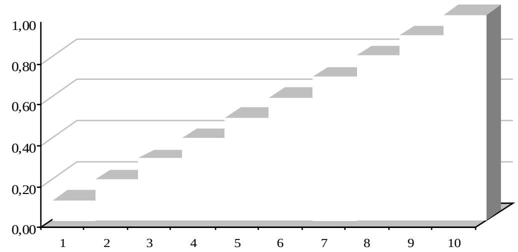


A distribuição U(10)

A Função de Distribuição (FD)

$$F(x_i) = P(\leq x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \dfrac{i}{n} & \text{se } x \geq x_i \end{cases}$$

A Função de Distribuição (FD)



A distribuição acumulada da U(10)

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Suponha que um dado honesto é lançado. Seja X = valor da face voltada para cima. Determinar a distribuição de X.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

x	1	2	3	4	5	6	Σ
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Poisson

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento

Na Binomial a variável que interessa é o número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento). Muitas vezes, entretanto, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo, como o tempo, área, superfície, etc.

Para determinar a f(x) de uma distribuição deste tipo, será suposto que:

(i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;

(ii) Em intervalos de mesmo tamanho as probabilidades de um mesmo número de sucessos são iguais;

(iii) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;

(iv) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de um sucesso é proporcional ao tamanho do intervalo.

Definição:

Se uma variável satisfaz estas quatro propriedades ela é dita VAD de POISSON.

Se X é uma VAD de POISSON, então a função de probabilidade de X é dada por:

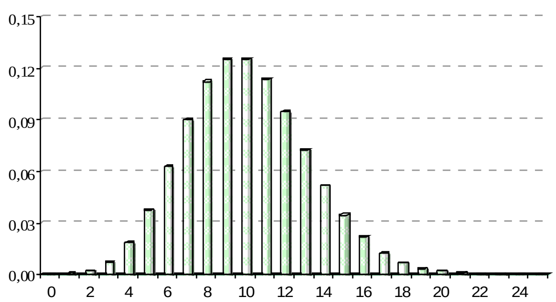
A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

$$\text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

"λ" é denominada de taxa de sucessos

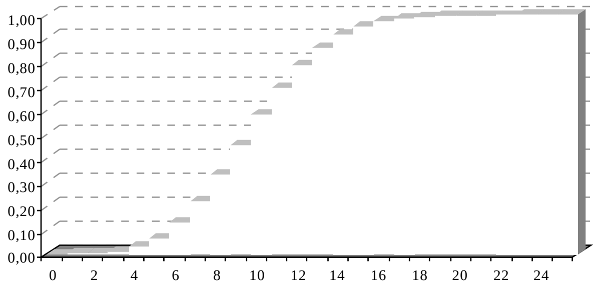
A Função de Probabilidade (fp) - P(10)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Função de Distribuição - P(10)



Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Características:

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \lambda$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

O número de consultas a uma base de dados computacional é uma VAD de Poisson com λ = 6 em um intervalo de dez segundos. Qual é a probabilidade de que num intervalo de 5 segundos nenhum acesso se verifique?

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A taxa de consultas é de “**seis**” em “**dez**” segundos em “**cinco**” segundos teremos uma taxa de $\lambda = 3$ consultas. Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-3}.0^{3}}{0!} =$$

$$= e^{-3} = 4{,}98\%$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Considerando o exemplo dado na Hipergeométrica, que foi resolvido, também, pela Binomial, é possível ainda utilizar a Poisson. Para isto deve-se fazer λ = np.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Então:

$\lambda = 10.0,05 = 0,5.$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}.0}{0!} =$$

$$= e^{-0,5} = 60,65\%$$

Em resumo:

Binomial: 59,85%

Hipergeométrica: 58,38%

Poisson: 60,65%

Como pode ser visto, nesse caso, é possível utilizar três modelos para resolver um único problema.