Mat2248 - Probabilidade I

4

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.

A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada **x** $\in$ **X(S)** um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x)dx = 1$$

A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares **(x, f(x))** é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X.

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de "c" para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de “c”, devemos igualar a área total a **um**, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.\, x^2\, dx = 1$$

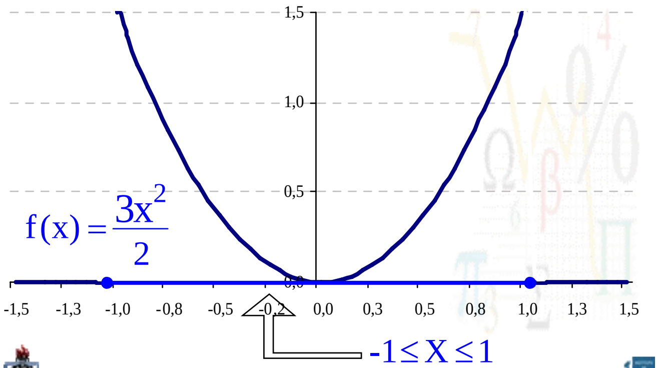
Tem-se:

$$\int_{-1}^{1} c.\, x^2\, dx = c\int_{-1}^{1} x^2\, dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

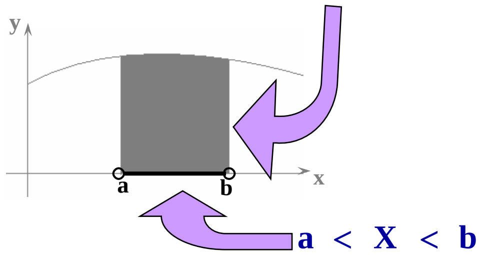
$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Representação Gráfica



Cálculo da Probabilidade

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Observações

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5].

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A probabilidade solicitada é dada por: é:

$$P(-0,5 < X < 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2}[(0,5)^3 - (-0,5)^3] = 12,50\ \%$$

VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int xf(x)dx$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx =$$
$$= \int x^2 f(x)dx - \left(\int xf(x)dx\right)^2 =$$
$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} =$$
$$= \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$

(c) Assimetria

$$\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3$$

(d) Curtose

$$\gamma_2 = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3 =$$

$$= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3$$

Se X é um VAC então o k-ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = E(X^k) = \int x^k f(x)dx$$

e o k-ésimo momento central de X é obtido por: $\mu_k^{'} = E(X^k) = \int (x-\mu)^k f(x)dx$

Considerando que o momento de ordem “k” de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado. Tem-se, então:

Exemplo

Calcular o valor esperado, a variabilidade da variável X = “número de caras” no lançamento de quatro moedas honestas.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Determinar a expectância e o desvio padrão da variável X dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$$\mu = E(X) = \int_{-1}^{1} x.f(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} x.\frac{3x^2}{2}.dx = \int_{-1}^{1} \frac{3x^3}{2}dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1^4}{4} - \frac{-1^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2.\frac{3x^2}{2}dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1^5}{5} - \frac{-1^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5} = 0,60$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

O desvio padrão de X será, então:

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} =$$

$$= \sqrt{0,60 - 0} = 0,77$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "**x**".

Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \dfrac{3u^2}{2} du & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos determinar o valor da integral em "u":

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2} \int_{-1}^{x} u^2 du =$$

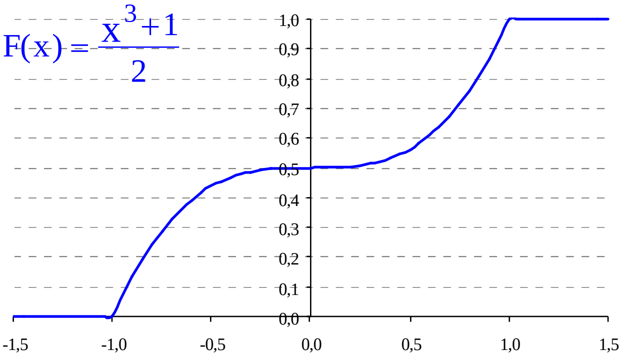
$$= \frac{3}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2} \left[u^3 \right]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{2}$$

Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \dfrac{x^3+1}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Representação Gráfica

$$F(x) = \frac{x^3+1}{2}$$



Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \le x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Observação:

Se X é uma VAC então o momento de ordem "k" é dado por:

$$E(X^k) = \int x^k f(x)dx$$

A fgm de X é dada por:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f(x)dx$$

No caso contínuo a função característica é dada por: $\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int e^{itx} f(x)dx$

Note-se que $\varphi(t)$ é obtida pela substituição de t por it se $\phi(t)$ existe.

Assim a função característica apresenta todas as propriedades da fgm.

Exemplo

Seja X uma VAC com fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determine a fgm de X.

Solução

A fgm de X será dada por:

$$\mu_k = E(e^{tX}) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx =$$

$$= \frac{\lambda}{t - \lambda}[e^{(t-\lambda)x}]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{para } \lambda > t$$

Exemplo

Seja X uma VAC com fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Determine a fgm de X.

Exemplo

A fc de uma VAC com fdp dada por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{se} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Determine a fdp de X.

Solução

A fdp de X será dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{1} (1+t)\, e^{-itx}\, dt + \int_{0}^{1} (1-t)\, e^{-itx}\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi x^2}(2 - e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{\pi x^2}(1 - \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}(x/2)}{x/2}\right]^2 \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$