Mat2248 - Probabilidade I

5

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Modelos Probabilísticos Contínuos

- Uniforme
- Exponencial
- Normal
- Gama
- Weibull
- Lognormal
- t (Student)
- χ^2 (Qui-quadrado)
- F (Snedekor)

Uniforme

Uma VAC X é uniforme no intervalo [a; b] se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se f(x) for:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

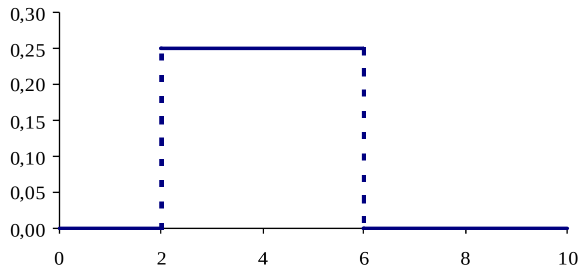
Exemplo

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [2; 6], isto é, X ~ U(2; 6). Então a fdp é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-2} = \dfrac{1}{4} & \text{se } 2 \le x \le 6 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Gráfico

Fdp da U(2; 6)



A Função de Distribuição

A função F(x) é dada por:

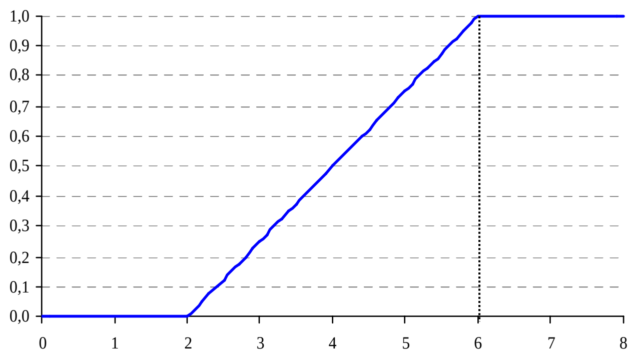
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Exemplo

Seja X uma uniforme no intervalo [2; 6], então a FDA de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{x-2}{4} & \text{se } 2 \le x \le 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

Representação Gráfica da U(2;6)



Caracterização

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a).(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Assimetria

$\gamma_1 = 0$

Curtose

$\gamma_2 = -6/5$

Função Geratriz de Momentos

$$\varphi(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{tx} dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

A função característica

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Exponencial

Uma variável aleatória T tem uma distribuição **exponencial** se sua fdp for do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Exemplo

O tempo de trabalho sem falhas de um equipamento (em horas) é dado pela função, abaixo. Determinar a probabilidade de que o equipamento não falhe durante as primeiras 50 horas.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}01\, e^{-0{,}01t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

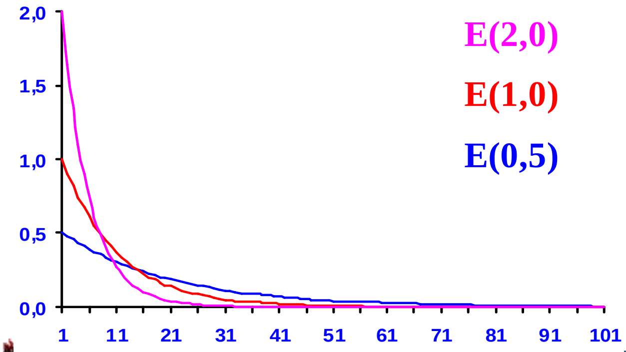
A probabilidade solicitada é dada pela integral da função no intervalo T < 50, isto é:

$$P(T < 50) = \int_0^{50} 0{,}01\, e^{-0{,}01t}\, dt =$$

$$= 0{,}01 . \int_0^{50} e^{-0{,}01t}\, dt = 0{,}01 . \left[-\frac{e^{-0{,}01t}}{0{,}01} \right]_0^{50} =$$

$$= 1 - e^{-0{,}5} = 39{,}35\,\%$$

Representação Gráfica



A Função de Distribuição

A função F(t) é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Obs.: Tente determinar!

Exemplo

O tempo de trabalho sem falha de um equipamento (em horas) é uma exponencial de parâmetro $\lambda = 0{,}01$. Determine a probabilidade de ele funcionar sem falhas por pelo menos 50 horas.

A FDA para esta fdp é dada por:

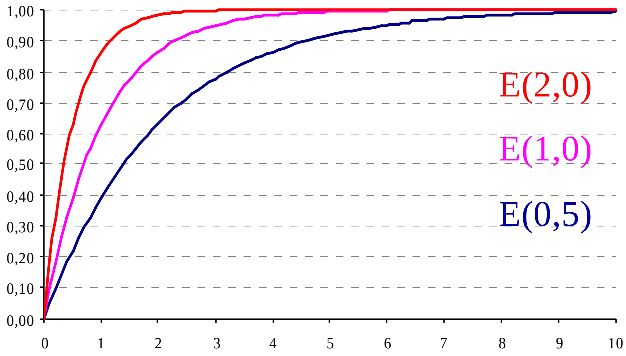
$$F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(T \leq 50) = F(50) = 1 - e^{-0{,}01.50} =$$

$$= 1 - e^{-0{,}5} = 39{,}35\%$$

Representação Gráfica



Caracterização

Expectância ou Valor Esperado

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt = \int_0^{\infty} t.\lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt =$$

$$\left[-te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Foi utilizado integração por partes

Variância

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t)dt = \int_0^{\infty} t^2.\lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda}.\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2 =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercício

Seja T uma VAC com distribuição exponencial de parâmetro λ. Determinar o valor mediano da distribuição.

Solução

Conforme visto a mediana é o valor que divide a distribuição de forma que:

$P(T < me) = P(T > me) = 50\%.$

Tem-se $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Então : $P(T < me) = F(me) =$

$1 - e^{-\lambda me} = 0{,}5 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda me} = 0{,}5$

$e^{-\lambda me} = 0{,}5 \Rightarrow -\lambda me = \ln(0{,}5)$

Assim $me = -\dfrac{\ln(0{,}5)}{\lambda} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Assimetria

$\gamma_1 = 2$

Curtose

$\gamma_2 = 6$

Função Geratriz de Momentos

$$\varphi(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{tx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

para $t < \lambda$

A função característica

$$\phi(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Gama

Para se definir a **Distribuição** Gama é necessário definir inicialmente a **Função** Gama.

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx, \quad \text{para} \quad k > 0$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A função Gama é recursiva, isto é:

$\Gamma(k+1) = k.\Gamma(k)$

É a equação funcional da função Gama.

Se n é um inteiro positivo, então:

$\Gamma(n) = (n - 1)!$

E uma vez que :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

A função gama pode ser considerada uma generalização do Fatorial.

Verificar, ainda, que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Uma vez definida a **Função** Gama, pode-se definir, então, a **Distribuição** Gama:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad \text{se } x > 0$$

$$= 0 \quad \text{c.c.}$$

Onde os parâmetros $r > 0$ e $\lambda > 0$ são denominados de parâmetro de forma (r) e parâmetro de escala (λ).

Se r for inteiro então a distribuição Gama é denominada de distribuição de Erlang.

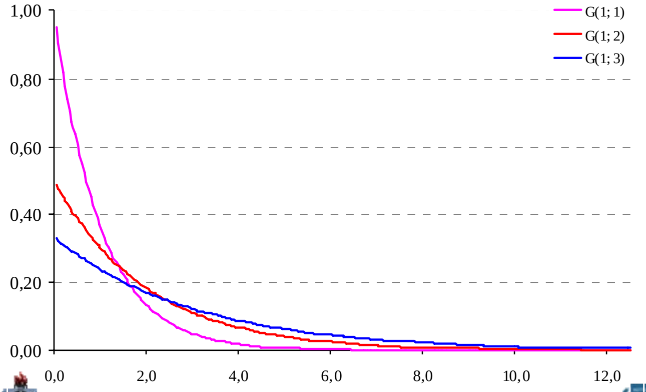
Agner Krarup Erlang (1878 – 1929)

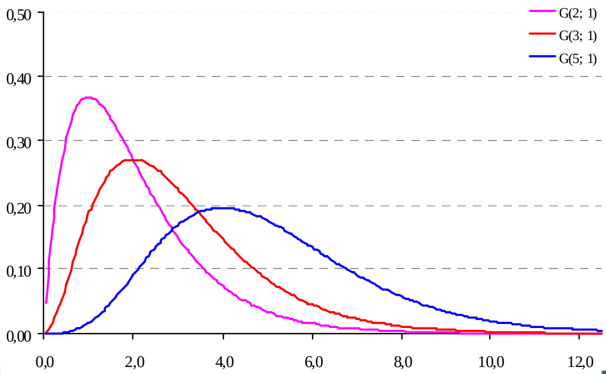
Relação entre a Gama e a Exponencial

Existe uma relação bastante próxima entre a Gama e a Exponencial. Se **r** = 1, a distribuição gama se reduz a uma exponencial.

Se uma variável aleatória X é a soma de **r** variáveis independentes e exponencialmente distribuídas cada uma com parâmetro λ, então X tem uma densidade **Gama** com parâmetros **r** e λ.

Representação Gráfica





A Função de Distribuição

A função F(x) é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \int_x^{\infty} \dfrac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda u)^{r-1} e^{-\lambda u}\, du & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Se r é um inteiro positivo a FDA pode ser integrada por partes fornecendo:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda x} (\lambda x)^k / k! \quad \text{se} \quad x > 0$$

que é a soma dos termos de uma Poisson com média λx. Assim a FDA da Poisson pode ser usada para avaliar a Gama.

Exemplo

A vida de equipamento eletrônico é dada por $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, a soma das vidas de seus componentes. Os componentes são independentes, cada um tendo tempo de falha exponencial com média entre falhas de 4 horas. Qual é a probabilidade de que o sistema opere pelo menos 24 horas sem falhas?

Solução

Como r = 4, então a FDA da Gama é dada por:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-x/4}(x/4)^k/k! \quad \text{se} \quad x > 0$$

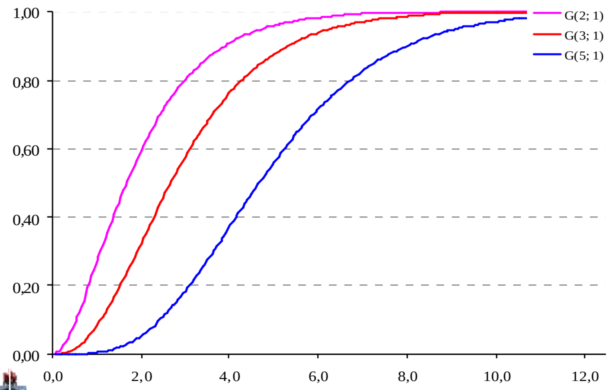
que é a soma dos termos de uma Poisson com média λx = 24/4 = 6.

$$P(Y > 24) = 1 - F(24) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3}(e^{-6}6^k)/k! =$$

$$= 15{,}12\%$$

Representação Gráfica



Caracterização

Expectância ou Valor Esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição Gama é dada por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \frac{r}{\lambda}$$

Variância

A Variância da Distribuição Gama é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

Assimetria

$$\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

Curtose

$$\gamma_2 = 6/r$$

Função Geratriz de Momentos

$$\varphi(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-r}$$

para $t < \lambda$

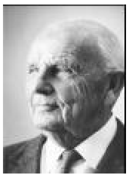
A função característica

$$\varphi(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r}$$

Weibull

A **Distribuição** de Weibull (1951) é aplicável a uma série de fenômenos, sendo uma das principais áreas os tempos de falha de componentes elétricos e mecânicos.

Ernest Hjalmar Waloddi WEIBULL (1887 - 1979)



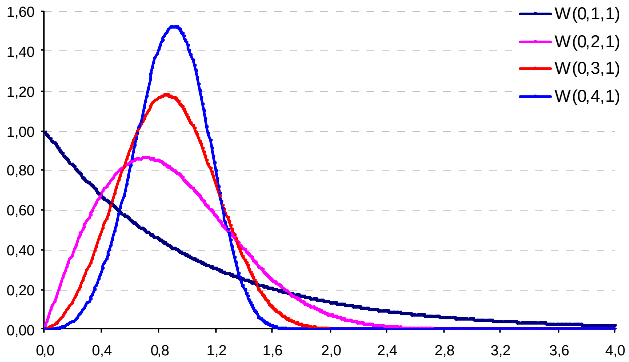
A função densidade de probabilidade de Weibull é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\delta}\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{se } x \geq \gamma \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Os parâmetros são γ ($-\infty < \gamma < \infty$) o de **locação**, $\delta > 0$ o de **escala** e $\beta > 0$ o de **forma**.

Quando $\gamma = 0$ e $\beta = 1$, a Weibull se reduz a uma exponencial de parâmetro $\lambda = 1/\delta$

Representação Gráfica



Exemplo

A vida de equipamento eletrônico é dada por $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, a soma das vidas de seus componentes. Os componentes são independentes, cada um tendo tempo de falha exponencial com média entre falhas de 4 horas. Qual é a probabilidade de que o sistema opere pelo menos 24 horas sem falhas?

Solução

$$P(Y > 24) = 1 - F(24) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} (e^{-6} 6^k)/k! =$$

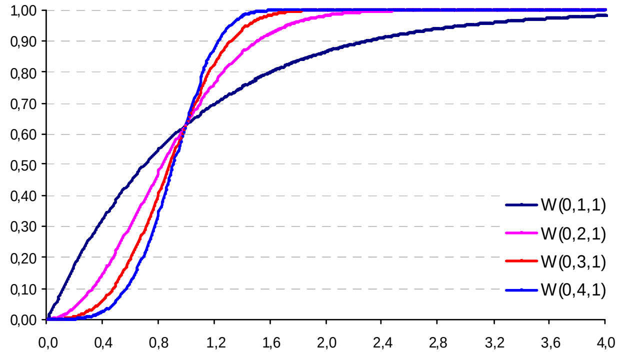
$$= 15{,}12\%$$

A Função de Distribuição

A função F(x) é dada pela seguinte expressão relativamente simples:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta} \right)^{\beta} \right] & \text{se } x \geq \gamma \\ 0 & \text{se } x < \gamma \end{cases}$$

Representação Gráfica



Exemplo

A distribuição do tempo de falha para um equipamento eletrônica é uma Weibull com parâmetros g = 0, b = ½ e d = 100. Determine a fração de equipamentos que espera resistam mais de 400 horas

Solução

$$P(X>400)=1-F(400)=$$
$$=\exp(-\sqrt{400/100})=$$
$$=e^{-2}=13{,}53\%$$

Caracterização

Expectância ou Valor Esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição de Weibull é dada por:

$$\mu = E(X) = \gamma + \delta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

Variância

A Variância da Distribuição de Weibull é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

Assimetria

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(1+\frac{3}{\beta})\delta^3-3\mu\sigma^2-\mu^3}{\sigma^3}$$

Curtose

Função Geratriz de Momentos

$$\varphi(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx=$$

A função característica

$$\varphi(t)=E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x)dx=$$