Mat2248 - Probabilidade I

7

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Função de uma variável aleatória

(i) Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória discreta com fp $p(x_i)$. Seja $Y = f(X)$. Se X for monótona, então $y_i = f(x_i)$, onde x_i são os valores de X, com a probabilidade: $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$

Se X não for monótona, então aos valores possíveis $y_i = f(x_i)$ de Y se associará a probabilidade igual a soma das probabilidades dos valores de X pertencente à imagem inversa de y_i por f.

Exemplo um:

Determinar a distribuição da variável $Y = 3X$, dada a distribuição de X da tabela:

x	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Solução:

Como $Y = 3X$ é monótona, a distintos valores de X correspondem distintos valores de Y. Assim:

y	3	9	15
q	0,4	0,1	0,5

Exemplo dois:

Determinar a distribuição da variável $Y = X^2$, se a distribuição de X é a da tabela:

x	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Solução:

Como $Y = X^2$ não é monótona, a correspondência entre os valores de X e de Y não é biunívoca. Então, por definição, a probabilidade de cada y_i será igual a soma das probabilidades dos valores de X correspondendo a y_i, isto é:

$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) =$
$= 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) =$
$= 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$

y	1	4
p	0,5	0,5

(ii) Variável Aleatória Contínua

Função de uma variável aleatória

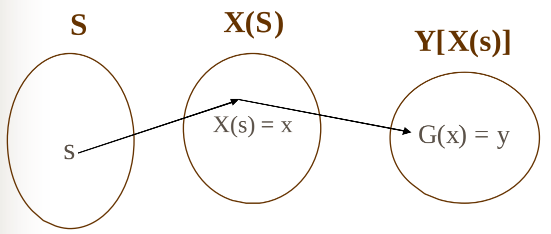
Seja X VAC com fdp f(x) definida a partir no espaço amostra S e assumindo valores (contradomínio) X(S). Seja $y = g(x)$, uma função derivável, definida em X(S) e estritamente monótona. Então Y é uma variável aleatória contínua com fdp h(y) dada por:

$$h(y) = f[g^{-1}(y)].\left|\frac{d[g^{-1}(y)]}{dy}\right|$$

Onde $g^{-1}(y)$ é a solução de $g(x) = y$ para x.

Se y = g(y) não conservar a monotocidade no contradomínio de X, este deverá ser decomposto em partes sobre as quais g(y) é monótona. g(y) será definida como a soma das $g_i(y)$ correspondentes aos intervalos onde for monótona.

$$h(y) = \sum_i f[g_i^{-1}(y)].\left|\frac{d[g_i^{-1}(y)]}{dy}\right|$$



Exemplo 1:

Suponha que X é uma VAC com fdp dada por $f(x) = 1/a$ se $x \in (0, a)$

$= 0$ se $x \notin (0, a)$

Determinar a fdp da variável

$y = g(x) = x^n$

Neste caso $y = g(x) = x^n$ e

$g^{-1}(y) = y^{1/n}$ $\qquad \dfrac{d[g^{-1}(y)]}{dy} = \left(y^{1/n}\right)' = \dfrac{y^{1/n-1}}{n}$

$$h(y) = f[g^{-1}(y)].\left|\frac{d[g^{-1}(y)]}{dy}\right| = f(y^{1/n}).\frac{y^{1/n-1}}{n} =$$

$$= \frac{1}{a}.\frac{y^{1/n-1}}{n} = \frac{y^{1/n-1}}{na} \quad \text{se } y \in (0, a^n)$$

Verificar que $\quad h(y) = \dfrac{y^{1/n-1}}{na}$ se $y \in (0, a^n)$

$= 0$ se $y \notin (0, a^n)$

é, de fato, uma fdp

$$\int_0^{a^n} \frac{y^{1/n-1}}{na} dy = \frac{1}{na}\int_0^{a^n} y^{1/n-1} dy =$$

$$= \frac{1}{na}\left[\frac{y^{1/n}}{1/n}\right]_0^{a^n} = \frac{(a^n)^{1/n}}{na\frac{1}{n}} = \frac{a}{a} = 1$$

Exemplo 1:

Considere a VAC X com fdp dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

Determine a densidade de probabilidade g(y) da variável aleatória $Y = X^2$.

A função $Y = X^2$ não é monótona sobre toda a reta. Decompondo nas regiões $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, então a função g(y) terá inversas que serão:

$$g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y} \quad \text{para} \quad y \in (-\infty; 0) \quad \text{e}$$

$$g_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \text{para} \quad y \in (0; \infty)$$

Desta forma a fdp de Y, será dada por:

$$h(y) = f[g_1^{-1}(y)].\left|\frac{d[g_1^{-1}(y)]}{dy}\right| + f[g_2^{-1}(y)].\left|\frac{d[g_2^{-1}(y)]}{dy}\right|$$

$$\frac{d[g_1^{-1}(y)]}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \frac{d[g_2^{-1}(y)]}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f[g_1^{-1}(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \qquad f[g_2^{-1}(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$$

Assim:

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}.\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}.\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| =$$

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \quad \text{para} \quad x \in (0; \infty)$$

A função g(y) é uma fdp, pois:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} dy$$

Fazendo: $y = t^2$ $(dy = 2tdt)$ vem:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

Exercício 1:

(01) Suponha que o comprimento da aresta de um cubo é uma VAC uniformemente distribuída sobre (a; b). Determine a expectância e a variância do volume do cubo.

Solução 1:

O volume do cubo é a VAC $Y = X^3$. Precisa-se, inicialmente, encontrar a fdp de Y.

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3} \qquad \frac{d[g^{-1}(y)]}{dy} = \frac{1}{3}y^{-(2/3)} = \frac{1}{3y^{2/3}}$$

Assim:

$$h(y) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{1}{3\,y^{2/3}} = \frac{1}{3(b-a)\,y^{2/3}} \text{ se } y \in (a^3; b^3)$$

Exercício 2:

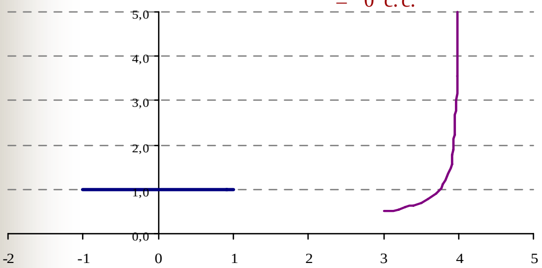
(02) Suponha que X é uniformemente distribuída sobre (-1; 1).

Seja $y = 4 - x^2$. Determine a fdp de Y e faça o seu gráfico.

Solução 2:

$$f(x) = 1 \text{ se } -1 < x < 1$$
$$= 0 \text{ c.c.}$$

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{4-y}} \text{ se } 3 < y < 4$$
$$= 0 \text{ c.c.}$$



Exercício 3:

(03) Suponha que X seja uma VAC com fdp dada por $f(x) = e^{-x}$ se $x > 0$

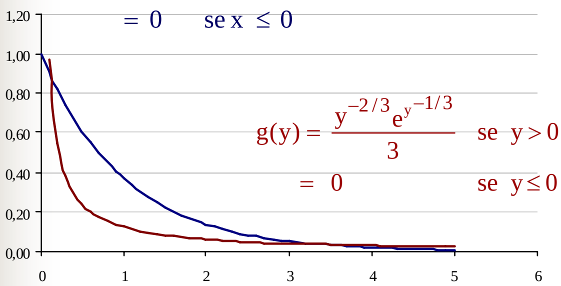
$= 0$ se $x \leq 0$

Seja $Y = X^3$. Determine a fdp de Y e faça o seu gráfico.

Solução 3:

$$f(x) = e^{-x} \text{ se } x > 0$$
$$= 0 \text{ se } x \leq 0$$

$$g(y) = \frac{y^{-2/3}e^{y^{-1/3}}}{3} \text{ se } y > 0$$
$$= 0 \text{ se } y \leq 0$$



Referências:

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. 2 ed. São Paulo: EDUSP, 2000.

GRIMMETT, G. R., SITRZAKER, D. R. *Probability and Random Processes*. Oxford (London): Oxford University Press, 1991.

HINES, William W., MONTGOMERY, Douglas C. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*. New York: John Willey, 1990.

JAMES, Barry R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro: IMPA, 1981.

MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MOOD, Alexander M., GRAYBILL, Franklin A. *Introduccion a la Teoria de la Estadistica*. Madrid: Aguilar, 1969.

WILKS, Samuel S. Mathematical Statistics. New York: John Wiley, 1961.