

03

## Mat2274 Estatística Computacional

Prof. Lorí Viali, Dr.  
[viali@mat.ufrgs.br](mailto:viali@mat.ufrgs.br)  
<http://www.ufrgs.br/~viali/>

## Tipos de Modelos de Simulação



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Da mesma forma que sistemas os modelos de simulação podem ser classificados de várias formas. O mais usual é classificar os modelos de simulação em três categorias.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



### Classificação:

- Determinísticos ou probabilísticos;
- Estáticos ou dinâmicos;
- Discretos, contínuos ou combinados.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



### Determinístico

Um modelo é determinístico quando tem um conjunto de entradas conhecido e do qual resultará um único conjunto de saídas.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Em geral, um sistema determinístico é modelado analiticamente, isto só não ocorre quando o modelo se torna muito complexo envolvendo um grande número de variáveis ou de relações.



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Neste caso, recorre-se a simulação como alternativa de solução. Dentre as principais aplicações da simulação determinística podemos citar o planejamento financeiro e a simulação de sistemas macroeconômicos.



## Probabilístico

Um modelo é probabilístico se possui uma ou mais variáveis aleatórias como entrada. Entradas aleatórias conduzem a saídas aleatórias. As saídas aleatórias são consideradas estimativas das verdadeiras características do sistema.



Ao contrário da situação determinística a simulação probabilística está mais próxima da realidade. Um processo de amostragem das variáveis aleatórias é estabelecido para tentar reproduzir, o mais fielmente possível, a realidade.



A amostragem utilizada é a aleatória simples, que se tornou um padrão em simulação.



## Discreto

Um modelo de simulação é dito discreto se a passagem do tempo é feita em intervalos de um evento a outro. Neste caso supõe-se que o estado do sistema não se altera ao longo do intervalo entre a ocorrência dos dois eventos consecutivos.



## Contínuos

Num modelo de simulação contínuo, a passagem do tempo é vista como se fosse realmente contínua, muito embora ela seja feita em pequenos intervalos de tempo, em virtude do método empregado e do próprio computador.



---

A simulação contínua é usada no estudo dos sistemas que envolvem equações diferenciais, como por exemplo, os sistemas dinâmicos ou é simulação de processos contínuos, como por exemplo, as operações de refinarias de petróleo.



---

Antigamente, fazia-se grande distinção entre simulação discreta e contínua em função do computador utilizado. Digital, no caso discreto e analógico, no caso contínuo. Atualmente, esta distinção já não é importante.



---

Existe um grande esforço de pesquisa na integração entre os dois tipos de modelos existindo, inclusive, vários softwares que fornecem tanto simulação contínua quanto simulação discreta.



---

No método de manuseio do tempo, de um modelo contínuo, as equações diferenciais são substituídas por equações de diferenças, especificando as mudanças no valor das variáveis entre intervalos pequenos de tempo.



## Estáticos

---

É um modelo aplicado a sistemas que não se alteram no correr do tempo. Embora alguns autores (FISHMAN, 1973) considerem a simulação apenas de sistemas que se alteram ao longo do tempo, pode-se simular situações em que o tempo é irrelevante.



---

Como exemplos de simulação estática tem-se a aplicação do método de Monte Carlo no cálculo de integrais ou experimentos amostrais em estudos estatísticos.





A aplicação mais antiga deve-se a W. S. Gosset (Student), que utilizou a amostragem aleatória, para verificar empiricamente, a distribuição amostral por ele deduzida (TOCHER, K. D., 1963).



A simulação estática ou MMC é utilizada em problemas de otimização, no teste de algoritmos de programação e em vários métodos numéricos.



Uma das principais aplicações da simulação estática (MMC) é nos algoritmos probabilísticos de otimização como o *Simulated Annealing*.



O termo Simulação ou Método Monte Carlo é também utilizado para designar a geração de números e variáveis aleatórias (SOBOL, 1983).



### Exemplo 1:

Determinar (simular) o valor de  $\pi$ , com aproximação de duas casas após a vírgula.



### Solução 1:

Para ilustrar como funciona a simulação estática vai-se calcular o valor de  $\pi$  por uma técnica denominada de integração por “hit and miss”.



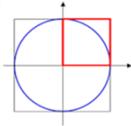
Faça  $x = u_1$  (aleatório um);

$y = u_2$  (aleatório dois);

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Se  $r < 1$  então  $h$  (hits) =  $h + 1$ ;

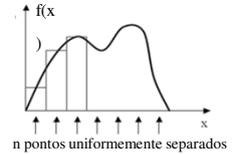
$$\pi = \frac{4h}{n} = \frac{4 \cdot \text{Hits}}{\text{Shots}}$$



## Exemplo 2:

Integração Unidimensional

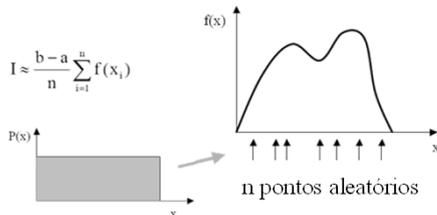
$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Método da Quadratura

$$I \approx \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Integração por Monte Carlo: mesma fórmula, mas pontos seleccionados ao acaso.



$$I \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

## Exercício:

Calcular a seguinte integral com aproximação até a quarta casa após a vírgula.

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

## Exemplo 3:

Amostragem Proporcional

(*Importance Sampling*)

Nesse caso os pontos são seleccionados de acordo com uma distribuição  $p(x)$ , ao invés de por quadratura, isto é, ao acaso ou uniforme no intervalo considerado.

$$I \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \quad \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \frac{1}{p(x_i)}$$

Onde  $\Delta x_i$  é o espaço entre os pontos que são determinados de acordo com  $p(x_i)$ . Portanto o valor da integral será avaliado por:

$$I \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

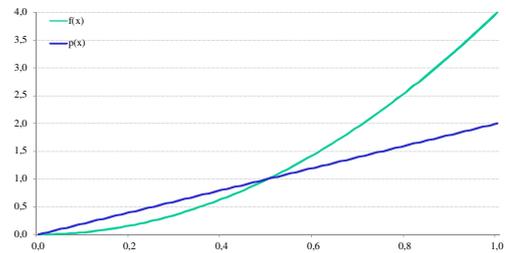
### Exercício:

Calcular o valor da integral abaixo utilizando a amostragem proporcional. Comparar o resultado com o procedimento retangular. Determinar a média e o desvio padrão dos erros dos dois procedimentos.

$$\int_0^1 4x^2 dx$$

### Solução:

$$f(x) = 4x^2 \quad - \quad p(x) = 2x$$



### Solução:

Nesse caso ao invés de selecionar os pontos ao acaso eles são selecionados de acordo com a distribuição  $p(x) = 2x$ .

A função de distribuição acumulada de  $p(x) = 2x$  no intervalo  $[0; 1]$  é dada por:

$P(x) = x^2$  e portanto o gerador de valores para a distribuição será:

$$u = x^2 \Rightarrow x = u^{1/2} \text{ onde } U = \text{aleatório}().$$

### Dinâmicos

Os modelos dinâmicos representam sistemas que mudam através do tempo. A maioria das aplicações da simulação está relacionada ao estudo deste tipo de sistemas.

No entanto pode-se construir um modelo estático de um sistema que se altera com o tempo. A característica principal do modelo dinâmico é portanto a presença de uma variável indexada representando o tempo do sistema.

---

Como exemplo, considere-se o sistema que descreve o custo de produção por unidade manufaturada. Se o modelo retratar a flutuação na média durante o período de produção então é dinâmico. Se retratar somente a média para todo período de produção então é estático.



## Modelos combinados

---

Um modelo de simulação discreta não é necessariamente utilizado para modelar um sistema discreto. Nem um modelo contínuo para modelar um sistema contínuo.



---

Um modelo de simulação pode ser discreto-contínuo, isto é, misto. A opção pela utilização de um modelo discreto, contínuo ou misto é uma função das características do sistema a ser modelado e dos objetivos do estudo.



---

Um canal de comunicações pode ser modelado discretamente se as características e movimento de cada mensagem for julgada importante. Se o fluxo total de mensagens através do canal é importante, modelar o sistema utilizando simulação contínua será mais adequado (HILLIER e LIEBERMAN, 2002)



---

Nos modelos combinados (contínuos/discretos), as variáveis independentes podem mudar tanto de forma discreta quanto contínua.



---

O comportamento do sistema é simulado pelo exame das variáveis em pequenos incrementos de tempo e os atributos das entidades na ocorrência dos eventos.



# Estágios de um estudo de Simulação



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Os procedimentos para simular um sistema dinâmico estocástico a eventos discretos envolvem as seguintes etapas:



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Modelagem da Estrutura Estática do Sistema

- Determinar a abrangência do estudo;
- Definir os limites do sistema a ser simulado;
- Certificar-se de que o sistema em estudo foi bem compreendido;



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



- Definir os subsistemas que farão parte do estudo e quais interações serão consideradas;
- Estabelecer o nível de profundidade que será abrangido, ou seja, o grau de desagregação do sistema.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Esta etapa envolve principalmente a análise das alternativas de hardware e software disponíveis. A escolha da plataforma computacional traz consequências sobre as demais etapas do estudo.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



## Modelagem da Estrutura Dinâmica do Sistema

Redução ou abstração do sistema real a um diagrama de bloco ou de fluxo lógico. Uma alternativa é valer-se de um diagrama de redes de filas.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



---

Outra alternativa bastante popular, principalmente na Inglaterra (CARRIE, 1992, CHEN, 1987, PIDD, 1997), é a utilização de um diagrama do ciclo da entidade ou ciclo da atividade que descreve o ciclo de vida de uma entidade do sistema.



---

Outra tarefa da modelagem é definir como será feito o manuseio da dinâmica do sistema, ou seja, de que forma o tempo será representado no modelo.



### **Modelagem da Aleatoriedade do Sistema**

Consiste em identificar as variáveis aleatórias do sistema e suas distribuições. Estas variáveis estão relacionadas com a duração das atividades em que as entidades do sistema estão engajadas e nas formas de entrar e sair do modelo.



---

As distribuições de probabilidade também podem ser utilizadas para decidir ramificações, quebra de máquinas, taxas de componentes defeituosos, etc.



### **Codificação do Modelo**

Codificar o modelo através do software escolhido. Esta é a etapa de programação propriamente dita. Envolve programar todos os detalhes do modelo se for utilizada uma linguagem de propósito geral, tal como Pascal, C, etc.



---

Se, por outro lado, o software utilizado for um pacote orientado por dados, então, nenhuma programação será necessária, bastando apenas se entrar com os dados do sistema a ser simulado.



## Verificação

Verificação significa que o programa deve produzir os resultados projetados no modelo. Deve ser verificado se a lógica do modelo foi corretamente programada e se não existem outros erros como variáveis fora de faixa, divisão por zero, etc.



## Validação

Determinar se uma inferência a partir do modelo sobre o sistema real estará correta para algum nível de confiança aceitável.



Validar um modelo significa garantir que o mesmo se comporta como o sistema real, se este existir, ou como o planejado, se o sistema for hipotético.



## Análise das Saídas

As alternativas que estão para ser simuladas devem ser determinadas. Decisões sobre o tamanho do período de inicialização e a forma de inicializar as variáveis. Sobre o extensão da corrida de simulação e o número de execuções do modelo que deverá ser feita.



## Documentação

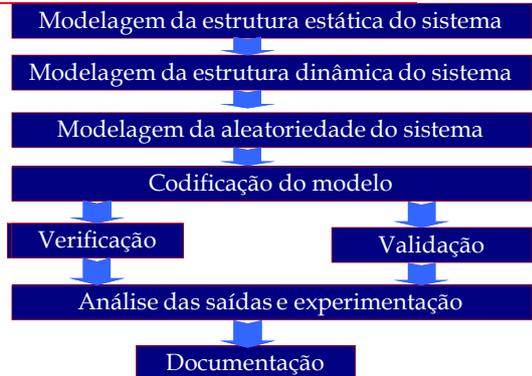
Documentar as hipóteses do modelo, bem como o programa computacional. A documentação é necessária por várias razões.



Por exemplo, se o programa é utilizado por diferentes analistas, então é necessário entender como o programa funciona.



## Fluxograma



## Referências:

- CARRIE, Allan. *Simulation of Manufacturing Systems*. Great Britain: John Wiley & Sons, 1992, 417 p.
- CHEN, Shin-Ken. *The Design, Evaluation and Test of Flexible Manufacturing System: A hybrid Approach of Optimization and Physical emulation*. USA: Case Western Reserve University, May 1987. Ph.D. Thesis.
- FISHMAN, G. S. *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. New York: Wiley, 1973.

- HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. *Introduction to Operations Research*. New York (NY): McGraw Hill, 2002. Seventh Edition. 805 p.
- NANCE, Richard E., TECH, Virginia. The Time and State Relationships in Simulation Modeling. *Communications of the ACM*. USA, v. 24, n. 4, p. 173-79, Apr. 1981.

- PIDD, M. *Computer Simulation in Management Science*. New York: John Wiley & Sons, 1997, 5nd ed., 307 p.
- SOBOL, I. **O método de Monte Carlo**. Editora Mir. Moscou. 1983, 64 p.
- TOCHER, K. D. *The Art of Simulation*. London: Universities Press, 1963. 184 p.

## Outros algoritmos similares:

- Genético
- Ant Colony
- Busca Tabu
- Hill Climbing
- GRASP
- VNS