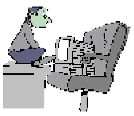
05

Mat02274
Estatística Computacional



Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.ufrgs.br/~viali/

Revisão de Probabilidade

Modelos

Sistema Real → Modelo → Determinístico
Sistema Real → Modelo → Probabilístico

Modelo Determinístico

Causas → Efeito

Modelo Probabilístico

~~Causas~~ → Efeito

Exemplos

Binomial → $f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} & x\in\{0,1,\ldots,n\}\\ 0 & c.c.\end{cases}$

Poisson → $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!} & x\in N\\ 0 & c.c.\end{cases}$

Normal → $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x\in\Re$

Experimento aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Exemplo

Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido.

Espaço amostral(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplo

S = { (1, 1), (1, 2),(1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Evento

Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Seja S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } um espaço amostra.

Então são eventos:

A = { 1, 3, 5}   B = { 6 }

C = { 4, 5, 6}   D = ∅   E = S

Ocorrência de um evento

Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Combinação de eventos

1. Soma - $A \cup B$
2. Produto - $A \cap B$
3. Diferença – $A - B$
4. Complementação - $\overline{A}$

Propriedades

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (B \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cap \overline{B} = A - B$

$\overline{A} \cap B = B - A$

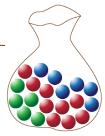
Conceitos de Probilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQUENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$

Frequência Relativa



$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Frequencial

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Consequências dos axiomas

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidade Condicionada

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são vermelhas.

Suponha que desta urna são retiradas "duas" fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

A = { a primeira ficha é vermelha}

B = { a segunda ficha é vermelha}

Então:

P(A) = 10/50 = 0,20 = 20%

P(B) = ?/49

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$P(B/A) = 9/49 = 0{,}1837 = 18{,}37\%$

Definição

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$

Teorema da multiplicação

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

(1) $P(A/B) = P(A)$

(2) $P(B/A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

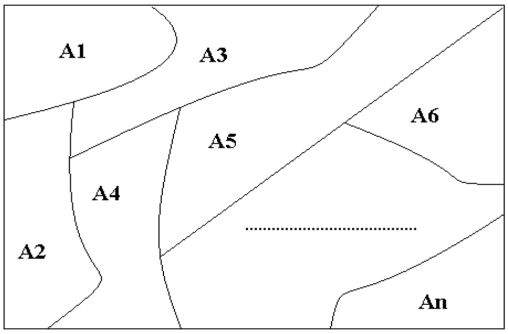
$A_1, A_2, \ldots, A_n$

eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

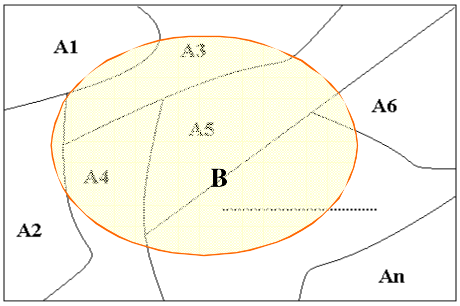
(2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, para todo $i \neq j$

(3) $P(A_i) > 0$, para todo i



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

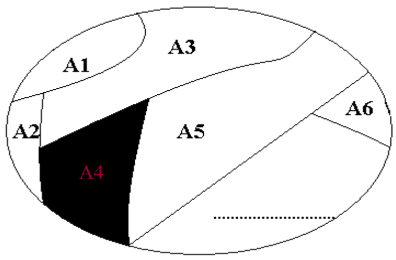
Teorema da Probabilidade Total



$P(B) = \sum P(Ai).P(B/Ai)$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

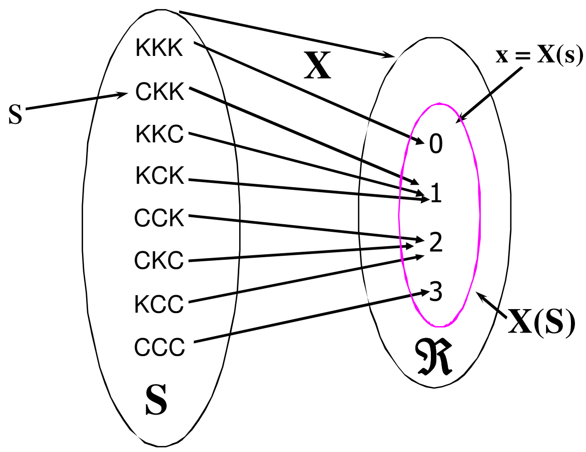
Teorema de Bayes



$P(A_i / B) = P(A_i).P(B/A_i) / P(B)$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Variável Aleatória



Uma função X que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada variável aleatória.

Conjunto de valores

O conjunto formado por todos os valores “x”, isto é, a imagem da variável aleatória X, é denominado de conjunto de valores de X.

$$X(S) = \{ x \in \Re \; / \; X(s) = x \}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – X(S) – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

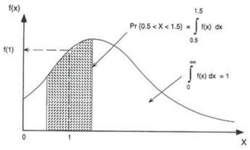
Variável Discreta

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Variável Aleatória Discreta

A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $x_i \in X(S)$ o número $f(x_i) = P(X = x_i)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$f(x_i) \geq 0$, para todo "i"

$\sum f(x_i) = 1$

A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares $[x_i, f(x_i)]$ para i = 1, 2, 3, ... é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD X.

Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então X = "soma do par" é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:

Como X((a, b)) = a + b, o conjunto de valores de X é dado por:

X(S) = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12}

A distribuição de probabilidade de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

Representação

- uma tabela;
- uma expressão analítica (fórmula);
- um diagrama.

Tabela

Seja X = “número de caras”, obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a dada ao lado.

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1

Expressão Analítica

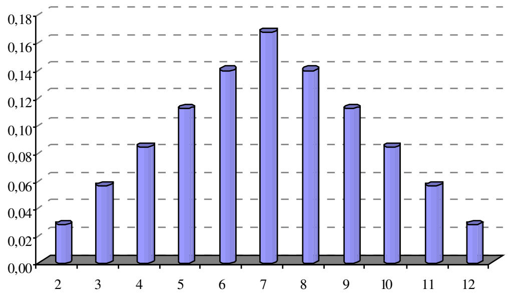
Considere X = “soma do par”, no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$f: X(S) \to \Re$$

$$x \to \begin{cases} (x - 1)/36 & \text{se } x \leq 7 \\ (12 - x - 1)/36 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Diagrama



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

VAD - Caracterização

(a) Expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.P(X = x)$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Calcular o valor esperado e a variabilidade da variável X = “número de caras” no lançamento de quatro moedas honestas.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculos

x	f(x)	x.f(x)	$x^2 f(x)$
0	1/16	0	0
1	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16
3	4/16	12/16	36/16
4	1/16	4/16	16/16
Σ	**1**	**32/16**	**80/16**

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Resultados

(a) Expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \frac{32}{16} = 2 \text{ caras}$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2} = \sqrt{\frac{80}{16} - 2^2} = \sqrt{5-4} = 1$$

Outros Resultados

(c) Moda

$$m_o = 2 \text{ caras}$$

(d) Mediana

$$m_e = 2 \text{ caras}$$

Modelos Discretos

- Bernoulli
- Binomial
- Geométrica
- Hipergeométrica
- Binomial Negativa
- Uniforme
- Poisson

Bernoulli

Experimento

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por "0" ou "fracasso" e "1" ou "sucesso". A probabilidade de ocorrência de "sucesso é representada por "p" e a de insucesso por "q = 1 – p".

Aplicações:

Fenômenos aleatórios com apenas dois resultados. Utilizada para gerar outras distribuições como a: Binomial, Geométrica e Binomial Negativa.

Conjunto de Valores - Range

$X(S) = \{ 0, 1\}$

Parâmetros

$p \in [0, 1]$

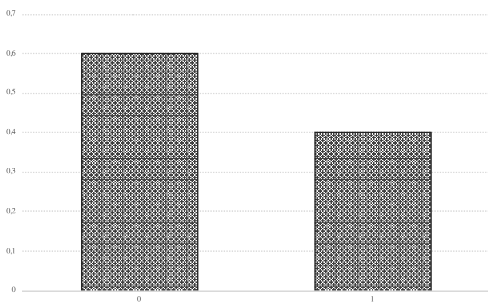
Notação:

$B(p)$

A Função (fp) de Probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

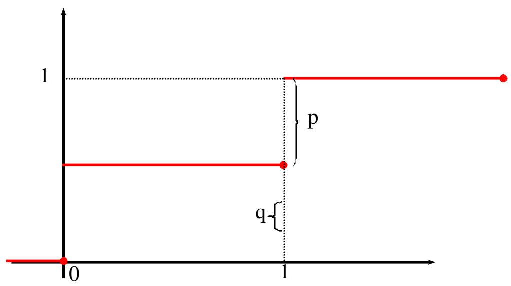
B(0,80)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

B(0,80)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

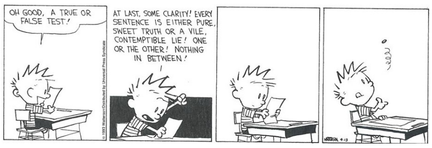
Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$
$$= 0^2.q + 1^2.p - p^2 =$$
$$= p - p^2 = p.(1 - p) = pq$$

Para gerar uma B(p) pode-se utilizar o seguinte algoritmo que é equivalente ao método da transformação inversa.

1. Gerar um número aleatório U;
2. Se $U \leq p$ então $X = 1$ senão $X = 0$.

Binomial



Experimento

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo $q = 1 - p$. A VAD definida por X = "número de vezes que A ocorreu nas 'n' repetições de E" é denominada **Binomial**.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Aplicações:

Fenômenos tais como acertos casuais em um prova, número de defeituosos em um lote, número de favoráveis em uma amostra, etc.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

$X(S) = \{ 0, 1, 2, ...n\}$

Parâmetros

$p \in [0, 1], n \in N^*$

Notação:

$B(n; p)$

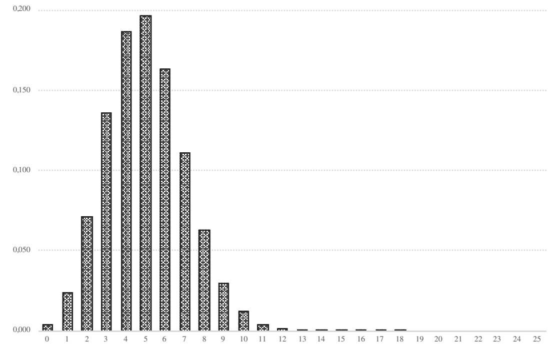
Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

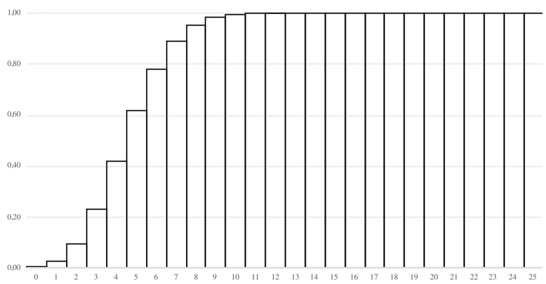
B(25; 0,20)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{se } x > n \end{cases}$$

B(25; 0,20)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$
$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$
$$= -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

Assim: $E(X) = np$

$\sigma_X = \sqrt{npq}$

Exemplo

Qual é a probabilidade de que um aluno acerte em prova objetiva, com 25 questões de 5 alternativas cada:

(i) Dez questões;

(ii) No máximo 5 questões.

Neste caso tem-se uma B(25; 0,2).

$$f(x) = P(X = x) = \binom{25}{x}(0,2)^x.(0,8)^{25-x}$$

$$\text{para } x = 0, 1, 2, ..., 25$$

$$\text{(i) } f(x) = P(X = 10) = \binom{25}{10}(0,2)^{10}.(0,8)^{25-10}$$

$$= \frac{25!}{10!15!}(0,2)^{10}.(0,8)^{15} = 1,18\%.$$

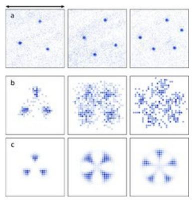
$$\text{(ii) } P(X \le 5) = \sum_{x=0}^{5}\binom{25}{x}(0,2)^x.(0,8)^{25-x} = 61,67\%.$$

Geração

Para gerar uma B(n; p) pode-se utilizar o fato de que se $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ são Bernoullis IID, então:

$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ é uma B(n; p).

Geométrica



Experimento

A distribuição Geométrica, também, está relacionada com o experimento de Bernoulli. A diferença é que, agora, o que é fixado é o primeiro sucesso e não o número de tentativas, isto é, X = número de tentativas realizadas até se conseguir o primeiro sucesso.

Aplicações:

Número de sucessos em uma sequência de tentativas independentes de Bernoulli com probabilidade p em cada tentativa.

Número de itens inspecionados antes de encontrar o primeiro defeituoso.

Conjunto de Valores

$X(S) = \{1, 2, 3, ...\}$

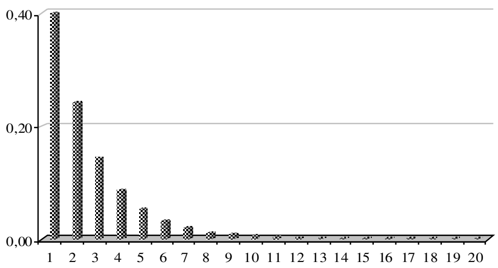
Parâmetros: $p \in [0, 1]$

Notação: $G(p)$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}$$

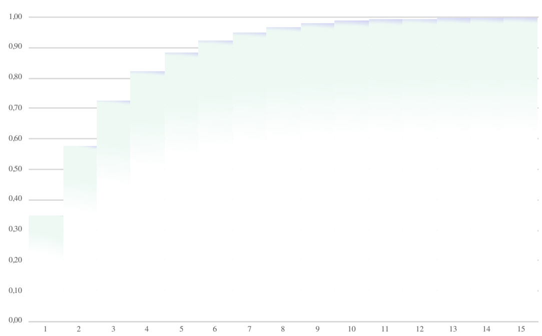
G(0,4)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 - q^x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

G(0,4)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.pq^{x-1} = \frac{1}{p}$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum x^2.pq^{x-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}$$

Exemplo

Suponha que um jogador de futebol converta 3 de cada 4 penalidades cobradas. Determine a probabilidade de ele tentar 4 vezes antes de converter a primeira?

Neste caso, tem-se: p = 3/4 = 75% e q = (1/4) = 25%

X = Número de tentativas antes do primeiro sucesso, é, então, uma G(0,75).

$f(x) = P(X = x) = 0{,}75.0{,}25^{x-1}$

para x = 1, 2, 3, ...

Portanto:

$f(4) = P(X = 5) = 0{,}75.0{,}25^{4} = 0{,}29\%$.

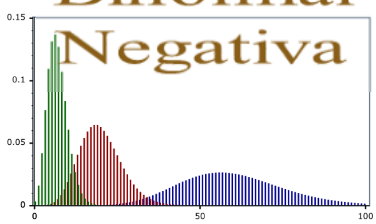
Geração

O seguinte algoritmo é equivalente ao método da transformação inversa:

1. Gerar U;
2. Fazer $X = \lfloor \ln(U)/\ln(1 - p) \rfloor$

Obs.: $\lfloor\ \rfloor$ = maior inteiro.

Binomial Negativa



Experimento

A distribuição binomial negativa é também conhecida como de **Pascal** ou de **Pólya**. Ela fornece o número de falhas até um número fixo de sucessos. Um experimento que apresenta uma distribuição binomial negativa satisfaz as seguintes condições:

Condições:

- Cada tentativa apresenta apenas dois resultados: sucesso ou fracasso;
- O experimento consiste de uma sequência de tentativas independentes;
- A probabilidade de sucesso permanece constante em todas as tentativas;

- O experimento continua até que um total de “r” sucessos sejam observados, onde “r” é um valor inteiro maior do que um, fixado de antemão.

Aplicações:

Número de **sucessos** antes da i-ésima tentativa; número de itens bons encontrados antes do primeiro defeituoso, etc.

Conjunto de Valores

$X(S) = \{r, r + 1, r + 2, ...\}$

Parâmetros

$p \in [0, 1]$

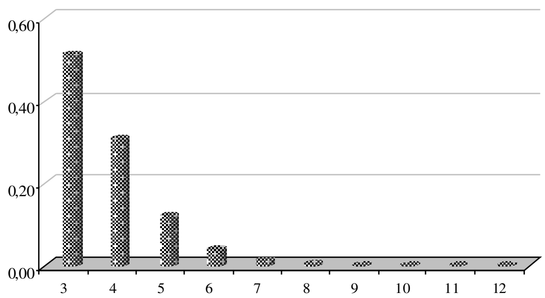
Notação

$BN(r; p)$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

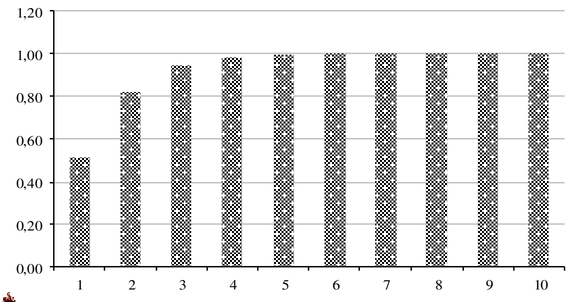
A distribuição BN(3; 0,4)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < r \\ \sum_{k=r}^{x} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} & \text{se } x \geq r \end{cases}$$

A distribuição acumulada da BN(1; 0,4)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x.f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x.\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = \frac{r}{p}$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x^2.\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{rq}{p^2}$$

Exemplo

Suponha que um jogador de basquete acerte 4 a cada 5 lances livres. Seja X o número de tentativas para obter o terceiro acerto. Determine a probabilidade de que ele precise fazer 6 lances, isto é, $P(X = 6)$.

Neste caso, tem-se:

$r = 3$, $p = (4/5) = 80\%$ e $q = 20\%$

X = Número de tentativas para obter o terceiro acerto é, então, uma BN(3; 0,8).

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} 0{,}8^3 0{,}2^{x-3}$$

onde $x = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

$$f(6) = P(X = 6) = \binom{6-1}{2} 0{,}8^3.0{,}2^{6-3} =$$

$$= \binom{5}{2} 0{,}8^3.0{,}2^3 = 0{,}0410 = 4{,}10\%$$

Observações:

Existe uma relação entre a Binomial e a Pascal (Binomial Negativa). Na Binomial fixa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) e observa-se o número de sucessos.

Na Binomial Negativa fixa-se o número de sucessos e observa-se o tamanho da amostra (número de provas de Bernoulli) necessário para obter o número fixado de sucessos.

Geração

A relação entre a uma geométrica G(p) e uma BN(s, p) leva ao seguinte algoritmo da convolução:

1. Gerar Y_1, Y_2, ..., Y_s variáveis geométricas.
2. Fazer $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_s$.

Hipergeométrica

Experimento

A distribuição Binomial é deduzida com base em “n” repetições de um experimento de maneira independente (isto é, p = constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.

Se a experiência consistir na seleção de objetos, sem reposição, de uma população finita, de tamanho “N”, onde “r” apresentam uma característica “N – r” não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.

Neste caso a variável aleatória **X** = "número de objetos com a característica **r** em uma amostra de tamanho **n**", terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.

Conjunto de Valores

x : máx{0, n–N+r}, ..., mín{r, n}

Parâmetros

$r \in [0, 1]$, $n \in N$ e $N \in N$

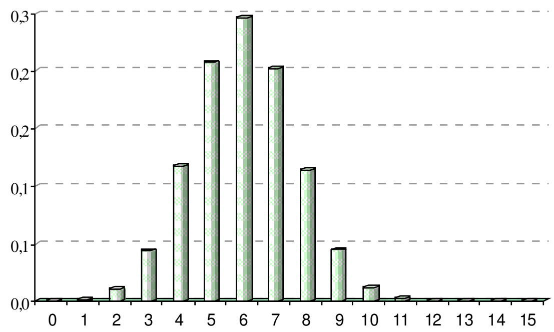
Notação

H(r, n, N)

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

H(20; 15; 50)



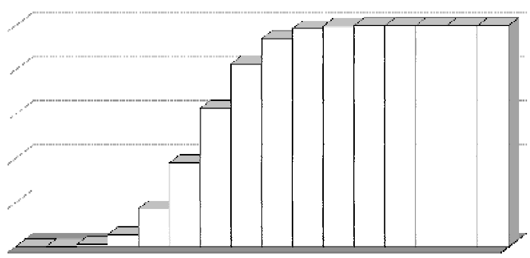
A Função de Distribuição

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < j \\ \sum_{x=j}^{k} \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{se } j \le x \le k \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

onde $j = \text{máx}\{0,\ n - N + r\}$

$k = \text{mín}\{r,\ n\}$

H(20;15;50)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{Onde } p = \frac{r}{N}$$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponha que a fábrica aceite as peças se não houver defeituosas em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Pela Hipergeométrica:

$N = 100$, $r = 5$, $n = 10$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}.\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 58,38\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Pela Binomial:

$n = 10$ e $p = 5/100 = 5\%$

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}.(0,05)^0.(0,95)^{10} =$$

$$= 59,87\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Geração

Um algoritmo para gerar um valor x de uma H(n, r, N) é:

$d_1 \leftarrow N - n;$

$d_2 \leftarrow \min(r,\ N - r);$

$Y \leftarrow d_2;$

$i \leftarrow n;$

Enquanto $iY > 0$ faça:

$Y \leftarrow Y - \lfloor U + Y/(d_1 + i) \rfloor;$

$i \leftarrow i - 1;$

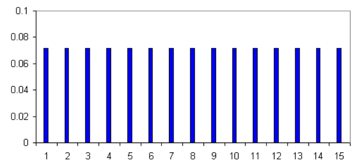
$X = d_2 - Y;$

Se $r \le N - r$ retorna X

senão $X \leftarrow n - X$.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Uniforme



Experimento

A distribuição uniforme é a mais simples das variáveis discretas. A variável assume os valores: m, m+1, ..., n sempre com igual probabilidade.

Definição

Uma variável aleatória X que assume os valores m, m+1, ..., n é dita uniforme discreta se todos os valores ocorrem com a mesma probabilidade, isto é, $f(x_i) = 1/(n-m+1)$.

Conjunto de Valores

$X(S) = \{m, m+1, ..., n\}$

Parâmetros

$m, n \in N$

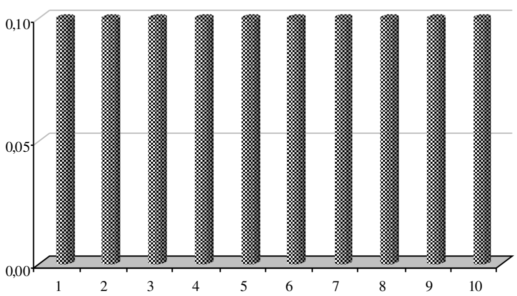
Notação

$U(m, n)$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x_i) = P(X = x_i) = 1/(n-m+1)$$

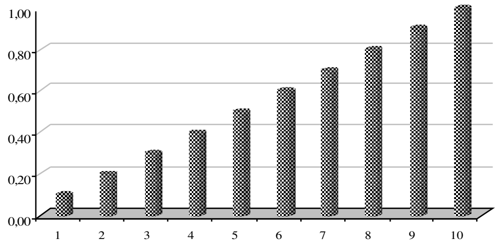
A distribuição U(10)



A Função de Distribuição

$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \dfrac{i}{n} & \text{se } x \ge x_i \end{cases}$$

U(10)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{n}[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}]$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Suponha que um dado honesto é lançado. Seja X = valor da face voltada para cima. Determinar a distribuição de X.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

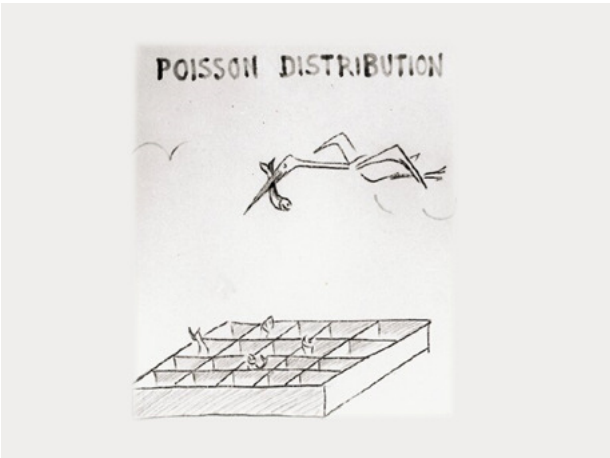
x	1	2	3	4	5	6	Σ
f(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Geração

- Gerar U;
- Fazer $X = m + \lfloor (n - m + 1)U \rfloor$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Experimento

Na Binomial a variável que interessa é o número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento). Muitas vezes, contudo, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo, como tempo, área, superfície, etc.

Para determinar a f(x) de uma distribuição deste tipo, será suposto que:

(i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;

(ii) Em intervalos de mesmo tamanho as probabilidades de um mesmo número de sucessos são iguais.

(iii) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;

(iv) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de um sucesso é proporcional ao tamanho do intervalo.

Definição:

Se uma variável satisfaz estas quatro propriedades ela é dita VAD de POISSON.

Se X é uma VAD de POISSON, então a função de probabilidade de X é dada por:

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{x}}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$

"**λ**" é denominada de taxa de sucessos.

Conjunto de Valores

$X(S) = \{0, 1, 2, \ldots\}$

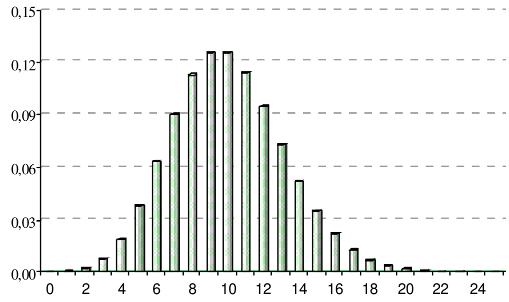
Parâmetros

$\lambda \in \mathbf{R}$

Notação

$P(\lambda)$

P(10)

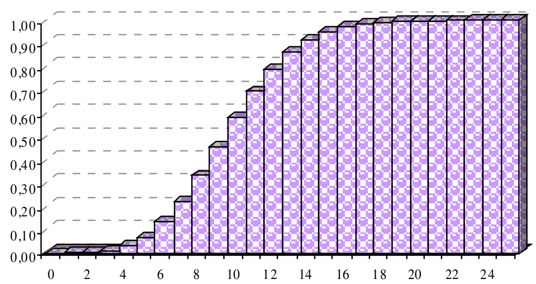


A Função de Distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{x} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

P(10)



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \lambda$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Exemplo

O número de consultas a uma base de dados computacional é uma VAD de Poisson com $\lambda = 6$ em um intervalo de dez segundos. Qual é a probabilidade de que num intervalo de 5 segundos nenhum acesso se verifique?

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

A taxa de consultas é de "**seis**" em "**dez**" segundos em "**cinco**" segundos teremos uma taxa de $\lambda = 3$ consultas. Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-3} \cdot 0^3}{0!} =$$

$$= e^{-3} = 4{,}98\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática – Departamento de Estatística

Exemplo

Considerando o exemplo dado na Hipergeométrica, que foi resolvido, também, pela Binomial, é possível ainda utilizar a Poisson. Para isto deve-se fazer $\lambda = np$.

Então:

$\lambda = 10.0{,}05 = 0{,}5.$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}.0}{0!} =$$

$$= e^{-0,5} = 60{,}65\%$$

Geração

O algoritmo para gerar uma Poisson de parâmetro λ toma como base a relação dessa distribuição com a Exponencial de parâmetro $1/\lambda$.

O algoritmo segue as seguintes etapas:

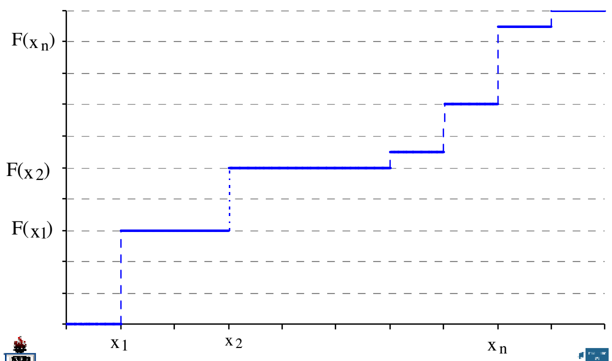
1. Seja $a = e^{-\lambda}$, $b = 1$ e $i = 0$;
2. Gerar U_{i+1} e substituir b por bU_{i+1}.

   Se $b < a$, fazer $X = i$, senão ir para 3.
3. Substituir i por $i + 1$ e ir para 2.

Distribuições Discretas

Seja X uma VAD com valores: x_1, x_2, ..., x_n, ... e com probabilidades dadas por: p_1, p_2, ..., p_n, ... Assim a FDA será:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{i} p_i$$



Assim um algoritmo para gerar uma VAD discreta com uma distribuição empírica é:

(i) Gerar U

(ii) Se $F(x_{i-1}) \leq U < F(x_i)$ então x_i

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

x_i	p_i
-1	0,1
0	0,2
2	0,3
5	0,2
7	0,1
8	0,1

Gerar 500 valores de acordo com a distribuição de probabilidade empírica dada ao lado.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística