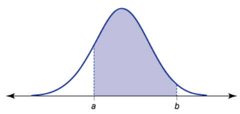
Mat02274
Estatística Computacional

06

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Geração de Variáveis Aleatórias Contínuas



Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.

A função densidade de probabilidade

É a função que associa a cada **x ∈ X(S)** um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$f(x) \geq 0$

$\int f(x)dx = 1$

A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares **(x, f(x))** é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X.

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de “c” para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de “c”, devemos igualar a área total a **um**, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.\, x^2\, dx = 1$$

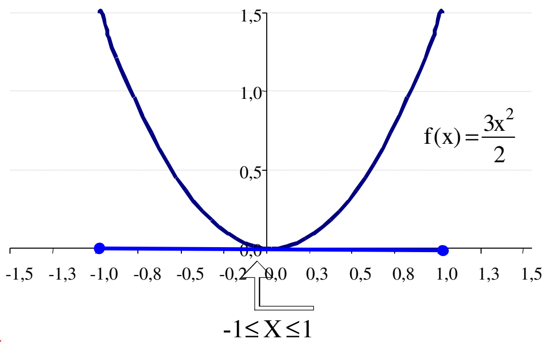
Tem-se:

$$\int_{-1}^{1} c.\, x^2\, dx = c\int_{-1}^{1} x^2\, dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

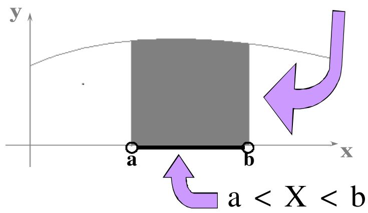
$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Representação gráfica



O cálculo da probabilidade

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Observações

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{e}$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) =$$

$$= P(a \le X \le b)$$

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A probabilidade solicitada é:

$$P(-0,5 < X < 0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2}[(0,5)^3 - (-0,5)^3] = 12,50\ \%$$

VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\int f(x)(x \;\; \mu)^2 dx} = \sqrt{\int x^2 f(x) dx - \mu^2}$$

Exemplo

Determinar a expectância e o desvio padrão da variável X dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-1}^{1} x.f(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} x.\frac{3x^2}{2}.dx = \int_{-1}^{1} \frac{3x^3}{2} dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1^4}{4} - \frac{-1^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2.\frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1^5}{5} - \frac{-1^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5} = 0,60$$

O desvio padrão de X será, então:

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} =$$
$$= \sqrt{0,60 - 0} = 0,77$$

A função de distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "**x**".

Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \dfrac{3u^2}{2} du & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

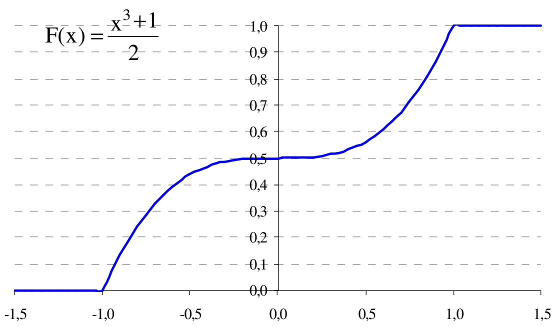
Vamos determinar o valor da integral em "u":

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2} \int_{-1}^{x} u^2 du =$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}[u^3]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{2}$$

Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \dfrac{x^3+1}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Representação gráfica



Cálculo da probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Exercício

Considere a seguinte função:

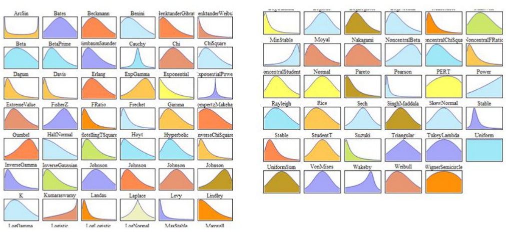
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

(1) Verifique se ela é uma fdp.

(2) Caso seja determine E(X) e V(X).

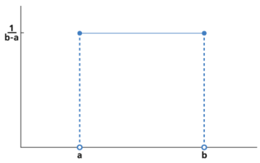
(3) Gere 5000 valores e calcule as principais estatísticas.

Modelos Probabilísticos Contínuos



- Uniforme
- Exponencial
- Pareto
- Poder
- Logística
- Cauchy
- Laplace
- Gumbel
- Rayleigh
- Triangular

Uniforme



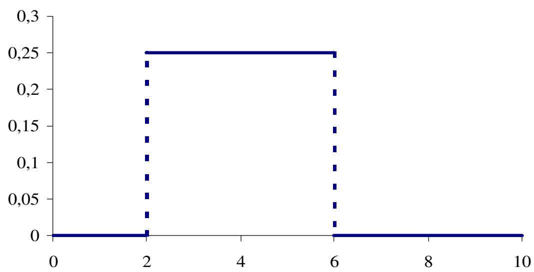
Uma VAC X é uniforme no intervalo [a; b] se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se f(x) for:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [2; 6], isto é, X ~ U(2; 6). Então a fdp é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-2} = \dfrac{1}{4} & \text{se} \quad 2 \le x \le 6 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Fdp da U(2; 6)



Parâmetros

Uma VAC uniforme apresenta dois parâmetros de localização: a e b > a.

Notação: U(a; b)

Intervalo: $a \le x \le b$

A função de distribuição

A função F(x) é dada por:

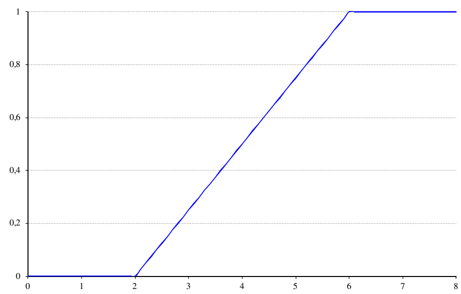
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \le x \le b \\ 1 & \text{se} \quad x > b \end{cases}$$

Exemplo

Seja X uma uniforme no intervalo [2; 6], então a FDA de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{x-2}{4} & \text{se } 2 \le x \le 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

FDA da U(2; 6)



Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a).(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2+b^2-2ab}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercício

Seja X uma uniforme no intervalo [a; b].

Determinar:
1. A moda
2. A mediana
3. A assimetria
4. A curtose
5. O coeficiente de variação.

Solução

$$\mu_e = \frac{a+b}{2} \qquad \mu_o = \text{A mod al}$$

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = \frac{9}{5} = 1{,}80$$

$$\gamma = \frac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$$

Mat02274

Observação

Uma distribuição uniforme no intervalo [0; 1] é denominada de número (pseudo) aleatório.

Notação U(0; 1) ou simplesmente U.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

Geração

A geração de valores dessa distribuição é feita através de:

X = a + (b – a)U.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

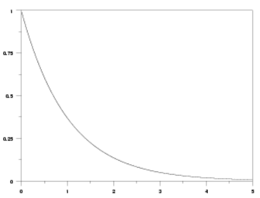
Mat02274

Exercício

Gerar 10000 valores de uma U(-2; 2). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Exponencial



Mat02274

Uma variável aleatória T tem uma distribuição exponencial se sua fdp for do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda . e^{\lambda t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Parâmetros

Uma VAC exponencial apresenta apenas um parâmetro de escala: $\lambda > 0$.

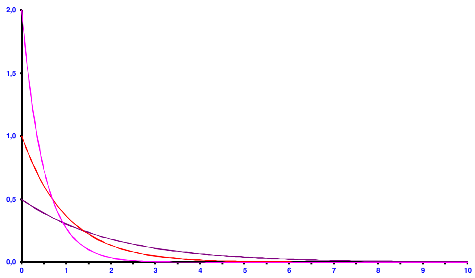
Notação: $E(\lambda)$

Intervalo: $t \geq 0$

Aplicações

A distribuição exponencial é utilizada principalmente em aplicações de confiabilidade e teoria das filas. Ela é utilizada para modelar dados com taxas constantes de falhas.

FDP: E(2,0) – E(1,0) – E(0,5)

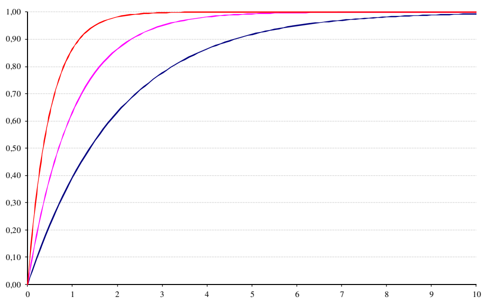


A função de distribuição

A função F(t) é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

FDA: E(2,0) – E(1,0) – E(0,5)



Expectância ou valor esperado

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt = \int_0^{\infty} t.\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= [-t\,e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= \left[-t\,e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

A variância

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t)dt = \int_0^{\infty} t^2.\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda}.\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2 =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercício

Seja X uma exponencial de parâmetro λ.

Determinar:
1. A moda
2. A mediana
3. A assimetria
4. A curtose
5. O coeficiente de variação
6. Intervalo interquartílico

Solução

$$\mu_e = \ln(2)/\lambda = \mu \ln(2)$$

$$\mu_o = 0$$

$$\gamma_1 = 2$$

$$\gamma_2 = 6$$

$$\gamma = 1$$

Geração

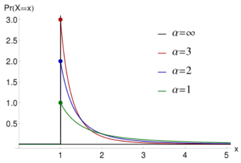
A geração de valores da distribuição exponencial é feita por meio de:

$$x = \ln(u)/\lambda = \mu \ln(u)$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma E(0,5). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas tanto para os dados quanto para o modelo.

Pareto



A **Distribuição** de Pareto é também conhecida como Exponencial Dupla, Hiperbólica, Lei do Poder ou ainda de Bradford. É usada para modelar tempo de CPU e tamanho de arquivos na Internet.

Vilfredo Federigo Samaso PARETO (1848 - 1923)

Aplicações

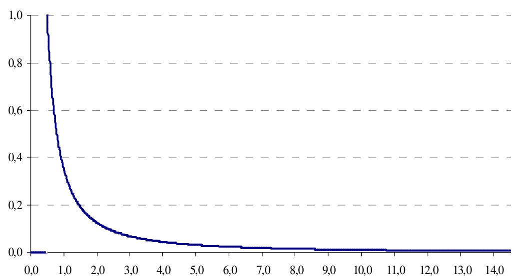
Frequências de palavras em textos longos, tamanho de cidades, tamanhos de arquivos na Internet que usam o protocolo TCP (muitos pequenos alguns grandes), tamanho de grãos de areia, tamanho de meteoritos, etc.

A função densidade de probabilidade da distribuição de Pareto é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta^{\alpha} x^{-(\alpha+1)} & \text{se } x \geq \beta, \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

O parâmetro de **locação**, $\beta > 0$ representa o menor valor possível da variável. O parâmetro $\alpha > 0$ representa a forma da distribuição.

Fdp da P(0,5; 0,5)



Exemplo

Suponha que a renda de uma determinada população tenha uma distribuição de Pareto com parâmetro de forma igual a 3 e parâmetro de escala igual a 1000. Determine o percentual da população que tem renda entre 2000 e 4000.

Solução

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1000}{x}\right)^3 & \text{se } x \geq 1000 \\ 0 & \text{se } x < 1000 \end{cases}$$

$$P(2000 < X < 4000) = F(4000) - F(2000) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1000}{4000}\right)^3 - \left[1 - \left(\frac{1000}{2000}\right)^3\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 =$$

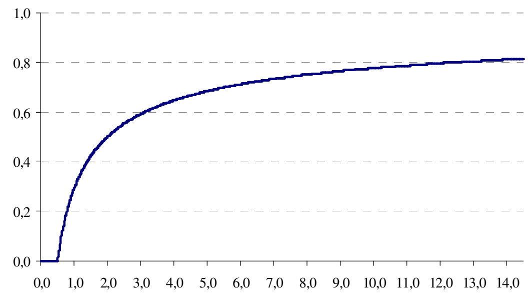
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64} = 10{,}94\%$$

A função de distribuição

A função F(x) é dada pela seguinte expressão relativamente simples:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\beta}{x}\right)^\alpha & \text{se } x \geq \beta \\ 0 & \text{se } x < \beta \end{cases}$$

FDA da P(0,5; 0,5)



Valor esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição de Pareto é dado por:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \quad \text{se } \alpha > 1$$

Exercício 1

Considerando uma P(α; β), determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose.

Solução

$$\mu_o = \beta$$

$$\mu_e = \beta 2^{1/\alpha}$$

$$\gamma_1 = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \quad \text{se } \alpha > 3$$

$$\gamma_2 = \frac{3(3\alpha^2+\alpha+2)(\alpha-2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)} \quad \text{se } \alpha > 4$$

Geração

Gerar valores de uma $P(\alpha; \beta)$, deve-se fazer:

$$X = \beta\left(\frac{1}{1-U}\right)^{1/\alpha}$$

Exercício 2

Gerar 10000 valores de uma P(2; 0,1). Fazer um diagrama dos resultados e calcular as seguintes medidas: média, desvio padrão, moda, mediana, assimetria e curtose tanto para os dados quanto para o modelo.

Poder

(Power)

Aplicações

Frequências de palavras em textos longos, tamanho de cidades, tamanhos de arquivos na Internet que usam o protocolo TCP (muitos pequenos alguns grandes), tamanho de grãos de areia, tamanho de meteoritos, etc.

A função densidade de probabilidade função Poder é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta^{\alpha} x^{\alpha-1} & \text{se } 0 \le x \le 1/\beta \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Parâmetros

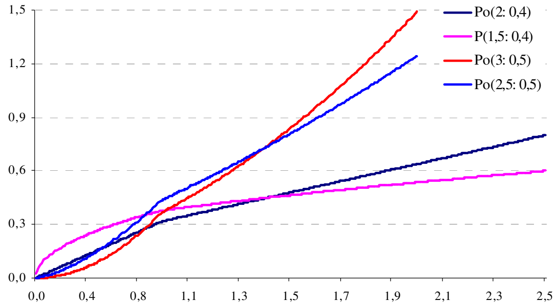
O parâmetro $\alpha > 0$ é o de escala e $\beta > 0$ o de forma.

O intervalo de variação é:

$0 \le x \le 1/\beta$

Notação: $P_o(\alpha;\ \beta)$

Exemplos

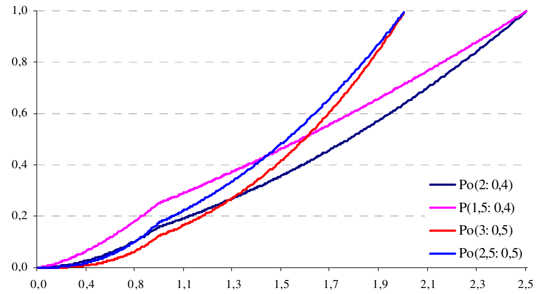


A função de distribuição

A função F(x) é dada pela seguinte expressão relativamente simples:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ (\beta x)^{\alpha} & \text{se } x \le 1/\beta \\ 1 & \text{se } x > 1/\beta \end{cases}$$

Exemplos



Valor Esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição de Pareto é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)}$$

A variância

A Variância da Distribuição de Pareto é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$$

Exercício 1

Considerando uma $P_o(\alpha; \beta)$, determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose.

Solução

$$\mu_o = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\gamma_1 =$$

$$\gamma_2 =$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha+2)}}$$

Geração

Para gerar valores de uma $P_o(\alpha; \beta)$, deve-se fazer:

$$X = \frac{1}{\beta} U^{1/\alpha}$$

Exercício 2

Gerar 10000 valores de uma P(2; 0,1). Fazer um diagrama dos resultados e calcular as seguintes medidas: média, desvio padrão, moda, mediana, assimetria e curtose tanto para os dados quanto para o modelo.

Logística

A **distribuição** Logística apresenta normalmente duas expressões. Uma denominada de fórmula geral e outra de forma padrão.

A distribuição Logística é derivada do trabalho de Verhulst, Professor de Análise na Faculdade Militar Belga. Ele a utilizou para modelar o crscimento da população na Bélgica no início de 1800.

Pierre François Verhulst (1804 - 1849)

Forma geral

A expressão geral da Logística é dada por:

$$f(x) = \frac{e^{(x-\alpha)/\beta}}{\beta[1+e^{(x-\alpha)/\beta}]^2} \quad \text{para } x \in R, \beta > 0$$

Ou

$$f(y) = \frac{(1/\beta)\, e^{y}}{[1+e^{y}]^2} \quad \text{para } x \in R,\ y = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Parâmetros

Os parâmetros são α (de localização) e $\beta > 0$ (de escala).

Notação: $L(\alpha; \beta)$

Intervalo: $\Re$

Forma padrão

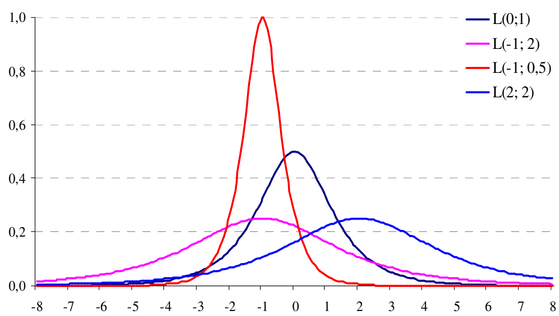
A função densidade de probabilidade da Logística padrão é dada por:

$$f(x) = \frac{e^{x}}{[1+e^{x}]^2} \quad \text{para } x \in R$$

Ou

$$f(x) = \frac{1}{[1+e^{-x}]^2} \quad \text{para } x \in R$$

Fdp L(0; 1), L(-1,2), L(-1, 0,5) e L(2, 2)



Exercício

Suponha que X tem uma distribuição de Pareto com $\alpha = 1$. Mostre que $Y = \ln(X - 1)$ tem uma distribuição Logística Padrão.

A FDA

A FD da Logística é:

$$F(x) = \frac{e^{(x-\alpha)/\beta}}{1+e^{(x-\alpha)/\beta}} \quad \text{para } x \in R,\ \beta > 0$$

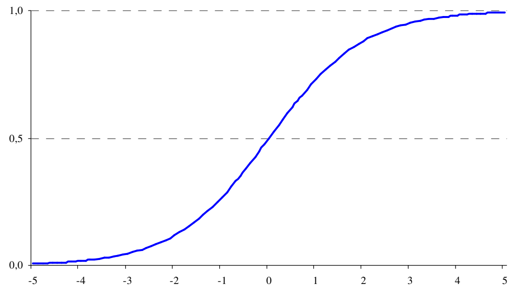
Ou

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\alpha)/\beta}} \quad \text{para } x \in R,\ \beta > 0$$

Ou ainda:

$$F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}} \quad \text{para } y \in R, y = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

A FDA da Logística



Valor Esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição Logística é dado por:

$$\mu = E(X) = \alpha$$

A Variância

A Variância da Distribuição Logística é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \beta^2 \frac{\pi^2}{3}$$

Exercício

Considerando uma L(α; β), determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose;

(5) O coeficiente de variação

Solução

$$\mu = \mu_o = \mu_e = \alpha$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = 6/5 = 4{,}2$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\frac{\pi^2\beta^2}{3}}}{\alpha} = \frac{\beta\pi}{\sqrt{3}\alpha}$$

Geração

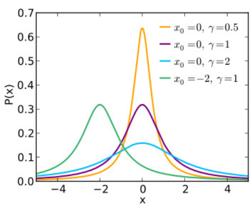
Valores de uma distribuição logística de parâmetros α e β podem ser obtidas por:

$$L(\alpha;\beta) \approx \alpha + \beta \ln\left[\frac{U}{1-U}\right]$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma L(-2; 5). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

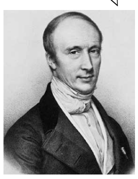
Cauchy



A **distribuição** de Cauchy apresenta normalmente duas expressões. Uma denominada de fórmula geral e outra de forma padrão.

A distribuição de Cauchy também denominada de Lorentziana é a distribuição do quociente de variáveis normais padrão independentes.

Baron Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)



Entre os físicos ela é conhecida como distribuição de Lorentz ou de Breit-Wigner. Ela é importante por que é a solução de uma equação diferencial que descreve a ressonância forçada.

Forma geral

A expressão geral da distribuição de Cauchy é:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\pi\left[1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]}, \quad \beta > 0$$

Ou

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi[\beta^2+(x-\alpha)^2]}, \quad \beta > 0$$

Mat02274

Parâmetros

Os parâmetros são α que é de localização e β que é o de escala.

Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, então tem-se a distribuição de Cauchy Padrão.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

Forma Padrão

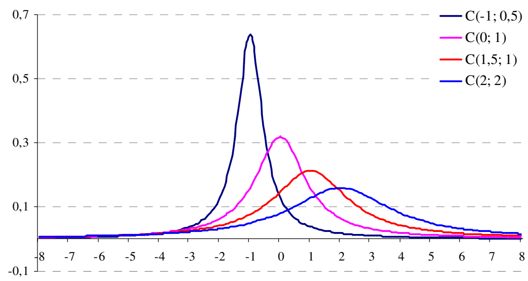
A função densidade de probabilidade da Cauchy Padrão é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+e^x)^2} \quad \text{para } x \in R$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

Exemplos



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

A função de distribuição

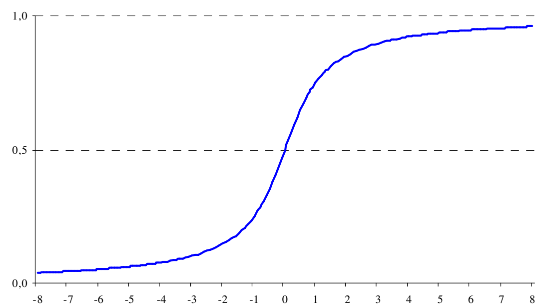
A FD da Cauchy é:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{x-\alpha}{\beta}\right] \quad \text{para } x \in R,\ \beta > 0$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

FDA da Cauchy Padrão



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática e Estatística

Valor Esperado

A distribuição de Cauchy não tem valor esperado, i.e. média e assim não tem variância e demais características.

Exercício

Considerando uma C(α; β), determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose;

(5) O coeficiente de variação

Solução

$\mu_o = \mu_e = \alpha$

Essa distribuição não apresenta momentos finitos. A média e o desvio padrão podem ser assumidos como sendo α e β respectivamente.

Geração

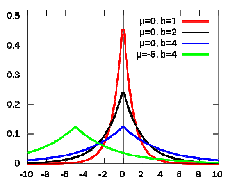
Para gerar valores de uma Cauchy de parâmetros α e β:

$$C(\alpha;\beta) \approx \beta\{tg[\pi(U - 0,5)]\} + \alpha$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma C(1; 2). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

Laplace



A distribuição de Laplace se origina da diferença entre duas VA exponenciais IID. É um movimento Browniano avaliado em um tempo aleatório exponencialmente distribuído.

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827)

A distribuição é conhecida também pelo nome de Exponencial Dupla, embora esse nome também seja aplicado a Distribuição de valores extremos. É conhecida ainda por Exponencial de Dupla Cauda e Exponencial Bilateral.

Forma geral

A expressão da distribuição de Laplace é:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left[-\frac{|x - \alpha|}{\beta}\right] = \frac{e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}}{2\beta} \qquad \beta > 0$$

Parâmetros

Os parâmetros são α que é de localização e β que é o de escala.

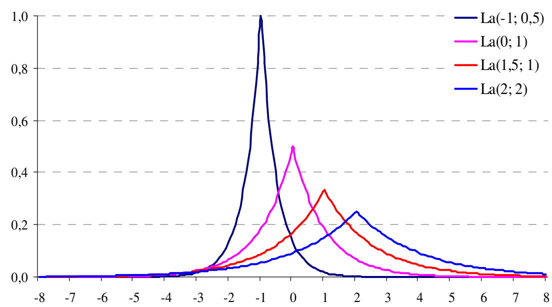
Forma padrão

Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então a distribuição de Laplace assume a forma.

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2} \quad \text{para } x \in R$$

Essa distribuição é, às vezes, denominada de primeira lei do Erro de Poisson.

Exemplos

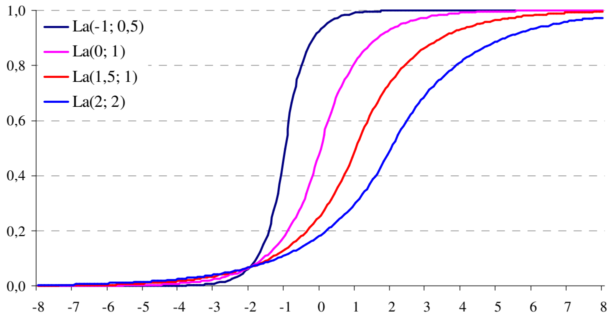


A função de distribuição

A FD da Distribuição de Laplace é:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right] & \text{se } x \le \alpha \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right] & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

A FDA da Laplace Padrão



Valor esperado

A Expectância da Distribuição de Laplace é dada por:

$$\mu = E(X) = \alpha$$

A variância

A Variância da Distribuição de Laplace é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = 2\beta^2$$

Exercício

Considerando uma Lp(α; β), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) A assimetria;
(4) A curtose;
(5) O coeficiente de variação

Solução

$$\mu = \mu_o = \mu_e = \alpha$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = 3$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\beta^2}}{\alpha} = \sqrt{2}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

Geração

$$L(\alpha;\beta) \approx \alpha - \beta\,\mathrm{sgn}(U)\ln(1-2\,|\,u\,|)$$

Onde U é uma uniforme no intervalo (-0,5; 0,5].

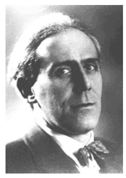
Exercício

Gerar 10000 valores de uma La(-2; 2). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

Gumbel

A distribuição de Gumbel é também conhecida como distribuição de Valores Extremos, log-Weibull ou Fisher-Tippet. Seu nome é uma homenagem a Emil J. Gumbel.

Emil Julius Gumbel (1891 - 1966)



Leonard Henry Caleb Tippett (1902 - 1985)

A distribuição tem duas formas. Uma é baseada no menor extremo e a outra no maior. Elas são denominadas de casos mínimo e máximo respectivamente.

A distribuição é utilizada na Indústria em aplicações de Controle de Qualidade. Nas ciências ambientais é utilizada para modelar valores extremos associados com enchentes e precipitações pluviométricas.

Forma geral

A expressão da distribuição de Gumbel (caso mínimo) é:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\exp\left(-e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\right) \qquad \beta > 0$$

A expressão da distribuição de Gumbel (caso máximo) é:

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\exp\left(-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right) \qquad \beta > 0$$

Parâmetros

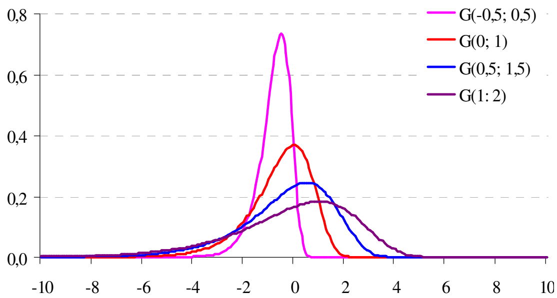
Os parâmetros são α que é de localização e β que é o de escala.

Forma padrão

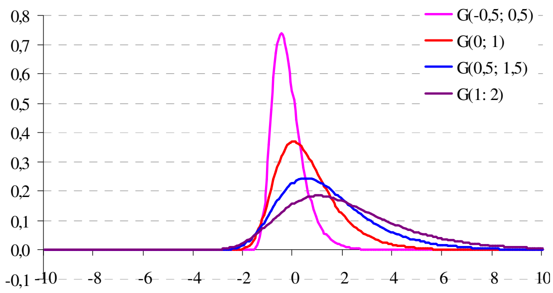
Se α = 0 e β = 1 então a distribuição de Gumbel assume a forma.

$$f(y) = e^{y}e^{-e^{y}} \quad \text{para } y \in \mathbb{R} \text{ onde } y = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Exemplo - Mínimo



Exemplo - Máximo



A função de distribuição

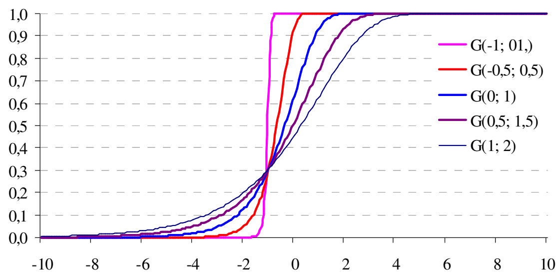
A FDA da Distribuição de Gumbel é:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-e^{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}\right] \quad \text{para } \beta > 0$$

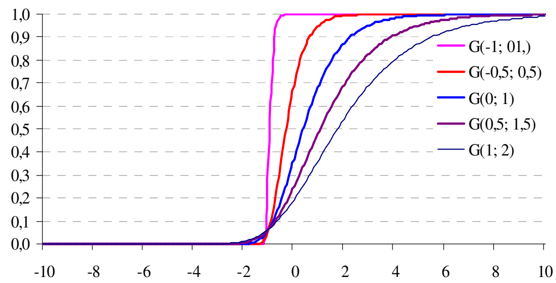
Ou

$$F(x) = 1 - e^{-e^{y}} \quad \text{onde } y = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

FDA de Gumbel - Mínimo



FDA de Gumbel - Máximo



Valor esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição de Gumbel é:

$$\mu = E(X) = \alpha + \beta\Gamma'(1) = \alpha - \gamma\beta$$

Onde Γ'(1) é a derivada de Γ(n) quando n = 1, isto é, Γ(1) = -0,577216 = γ = constante de Euler.

Variância

A Variância da Distribuição de Gumbel é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(\pi\beta)^2}{6}$$

Exercício

Considerando uma G(α; β), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) A assimetria;
(4) A curtose;
(5) O coeficiente de variação

Solução

$$\mu_e = \alpha + \beta[\ln(\ln(\ 2))] = \alpha - 0{,}3665\,\beta$$

$$\mu_o = \alpha$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^3} = \frac{-2{,}404114\beta^3}{\frac{(\pi\beta)^2}{6}\cdot\frac{\pi\beta}{\sqrt{6}}} = -1{,}1395$$

$$\gamma = \frac{\pi\beta}{6\alpha - 3{,}4632\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^4} = \frac{\frac{3(\pi\beta)^4}{20}}{\left[\frac{(\pi\beta)^2}{6}\right]^2} = 5{,}4$$

Geração

Valores da distribuição de Gumbel podem ser gerados através do método da inversão:

$$G(\alpha;\beta) \approx \alpha + \beta \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-U}\right)\right]$$

Mat02274

Exercício

Gerar 10000 valores de uma G(-2; 2). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística

Rayleigh

Mat02274

A distribuição de Rayleigh pode ser obtida através de duas componentes ortogonais normalmente IID. O valor absoluto (p. e. velocidade do vento) terá uma distribuição de Rayleigh.

John William Strutt (Lord) RAYLEIGH (1842 - 1919)

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

Se for tomado um número complexo ao acaso com as componentes real e imaginária normalmente IID o valor absoluto terá uma distribuição de Rayleigh.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística

Mat02274

Se $\beta = 1$, então $R(1)^2 \sim \chi^2_2$;

A χ^2 é uma generalização da Rayleigh;

A Weibull é, também, uma generalização da Rayleigh.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática e Estatística

Forma Geral

A expressão da distribuição de Rayleigh é:

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right) \quad \text{se } x \geq 0, \ \beta > 0$$

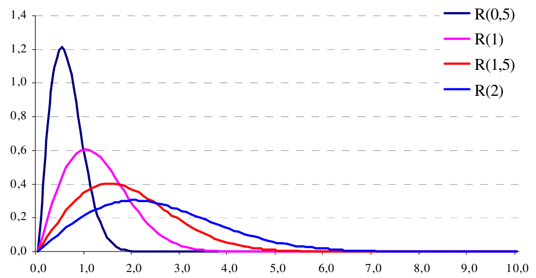
Parâmetros

O modelo apresenta um parâmetro de escala $\beta > 0$.

Notação: $R(\beta)$

Intervalo: $[0; \infty)$

Exemplo

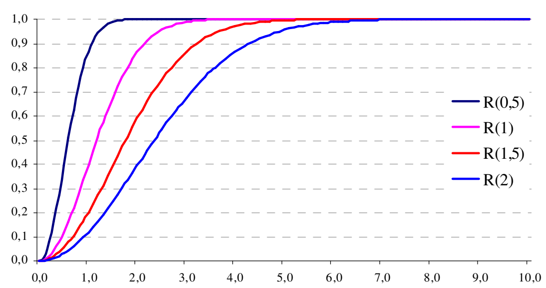


A FDA

A FDA da Distribuição de Rayleigh é:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right] \quad \text{se } x \geq 0, \ \beta > 0$$

A FDA



Valor Esperado

A expectância ou valor esperada da Distribuição de Rayleigh é dado por:

$$\mu = E(X) = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

A Variância

A Variância da Distribuição de Rayleigh é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \beta^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(4-\pi)\beta^2}{2}$$

Exercício

Considerando uma R(β), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) A assimetria;
(4) A curtose;
(5) O coeficiente de variação

Solução

$\mu_o = \beta$ $\quad\quad \mu_e = \beta\sqrt{-2\ln(0{,}5)} = 1{,}3863\beta$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^3} = \frac{(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\left(2-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}} = 0{,}6311 \qquad \gamma_2 = -\frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(4-\pi)^2} = $$
$$= 0{,}2451$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\beta^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)}}{\beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} = 0{,}5227$$

Geração

A geração de valores dessa distribuição é feita através de uma qui-quadrado.

$$U = \beta[\sqrt{-2\ln(u)}]$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma R(2). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

Triangular

A distribuição triangular é utilizada para descrever populações onde poucos dados são conhecidos. É baseada no conhecimento do mínimo, máximo e uma idéia da moda.

Apesar de ser simples é utilizada para modelar processos onde o relacionamento entre as variáveis é conhecido, mas a disponibilidade de dados é pequena (em virtude do custo de obtenção).

É utilizada como uma alternativa da Beta no PERT, CPM e formas semelhantes de gerenciamento de projetos. Também na modelagem da exploração de gás e petróleo.

Forma Geral

A expressão da fdp da Triangular é dada por:

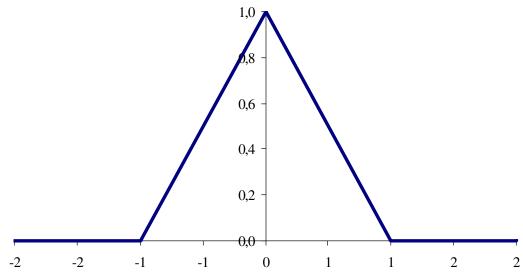
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{se } a \le x \le c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{se } c < x \le b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Parâmetros

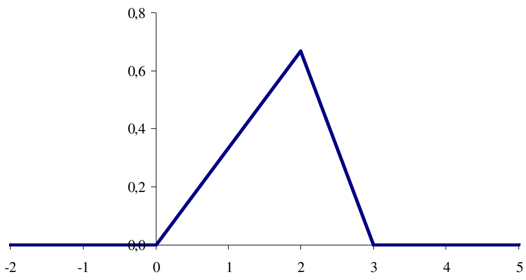
O modelo apresenta três parâmetros. Um de localização a. Um de escala b > a e um parâmetro de forma c tal que $a \le c \le b$.

Notação: T(a, c, b).

Exemplo 1



Exemplo 2

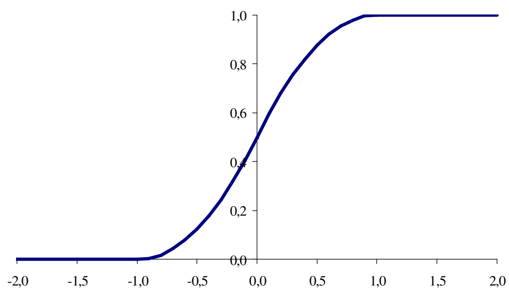


A FDA

A FD de Distribuição Triangular é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & \text{se } a \le x \le c \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & \text{se } c < x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Representação gráfica



Valor esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição Triangular é dado por:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b+c}{3}$$

A variância

A Variância da Distribuição Triangular é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$$

Exercício

Considerando uma T(a, b, c), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) O coeficiente de variação
(4) A assimetria;
(5) A curtose.

Solução

$$\mu_o = c$$

$$\mu_e = \begin{cases} a + \sqrt{\dfrac{(b-a)(c-a)}{2}} & \text{se } c \geq \dfrac{b-a}{2} \\ b - \sqrt{\dfrac{(b-c)(b+2c-3a)}{2}} & \text{se } c < \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)}{6(a+b+c)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(a+b-2c)(2a-b-c)(a-2b+c)}{5(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^{3/2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{12}{5}$$

Geração

A geração de valores de uma distribuição triangular é obtida através do seguinte algoritmo:

Se $U \leq (c-a)/(b-a)$ então $X = a + \sqrt{U(b-a)(c-a)}$

Senão $X = b - \sqrt{(1-U)(b-a)(b-c)}$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma T(0; 0,75; 1). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.