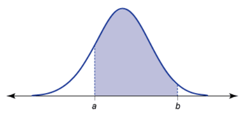
Mat02274
Estatística Computacional

06

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

Geração de Variáveis Aleatórias Contínuas



- Normal
- Log-Normal
- Gama
- Erlang
- Beta
- Weibull
- Student (t)
- Qui-Quadrado (χ^2)
- Snedcor (F)

A Normal

A Normal

A distribuição foi introduzida por De Moivre em um artigo de 1733. O seu resultado foi estendido por Laplace no seu livro “Teoria Analítica das Probabilidades” de 1812.

Abraham DE MOIVRE
(1667 - 1754)

Pierre-Simon, Marquis de LAPLACE
(1749 - 1827)

place utilizou a normal na análise de erros de experimentos. O “método dos mínimos quadrados” foi introduzido por Legendre em 1805.

Adrien Marie LEGENDRE
(1752 - 1833)

Ele foi justificado por Gauss, supondo uma distribuição normal dos erros, em 1809 que alegou que já utilizava o método desde 1794. Hoje ela é também conhecida como distribuição de Gauss-Moivre-Laplace.

Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855)

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

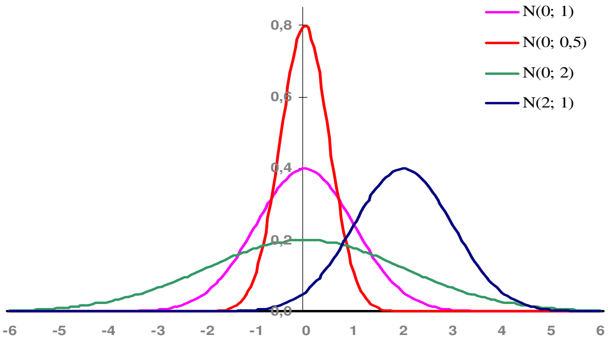
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \Re$$

$$\text{com } -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma > 0$$

Parâmetros

A **distribuição** Normal apresenta dois parâmetros. Uma de localização μ e outro de forma $\sigma > 0$. Neste caso os parâmetros representam a média e a variabilidade do modelo.

Exemplos



Cálculo de Probabilidades

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável através do TFC, isto é, não existe F(x) tal que F'(x) = f(x).

Solução

Utilizar integração numérica. Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).

Forma Padrão

A curva escolhida é a N(0, 1), isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Se X é uma N(μ, σ), então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

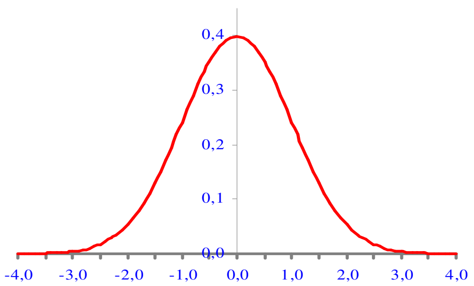
Será uma N(0; 1).

A fdp da variável Z é dada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}, \; z \in \Re$$

uma vez que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

A Distribuição N(0, 1)



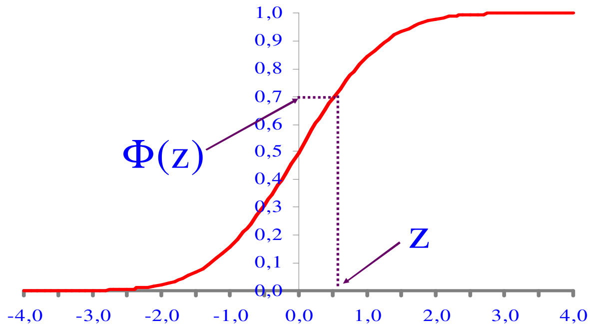
Tabelas

O que é tabelado é a FDA da variável Z, isto é:

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(z)$$

A FDA da N(0; 1)



Valor Esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição Beta é dada por:

$$\mu = E(X) = \mu$$

A Variância

A Variância da Distribuição Normal é dada por:

$$V(X) = \sigma^2$$

Exercício

Considerando uma N(μ; σ), determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose;

(5) O coeficiente de variação.

Solução

$$\mu_o = \mu = \mu_e$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = 3$$

$$\gamma = \frac{\mu}{\sigma}$$

Geração

Existem muitos métodos para se gerar valores de uma variável normal. Aqui será apresentado o método denominado de Convolução.

A geração de valores da normal, por convolução é dado por:

$$N(0,1) \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} U_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{12}}}$$

Fazendo k = 12, tem-se:

$$N(0,1) \approx \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma N(10, 2). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

A Log-Normal

Uma variável pode ser modelada através de uma log-normal se ela for um produto de vários pequenos fatores independentes. Um exemplo típico é o retorno de longo prazo em ações que pode ser considerado como o produto das taxas diárias de retorno.

Forma Geral

A expressão da fdp da Log-Normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{se } x \geq 0, \quad \sigma > 0$$

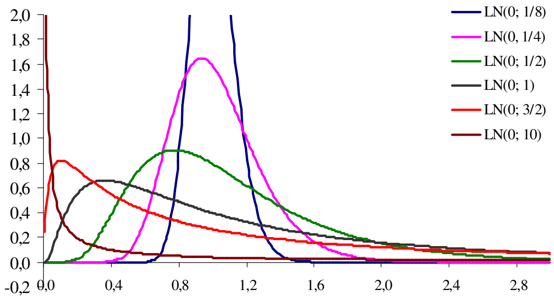
Ou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad \text{se } x \geq 0, \quad \sigma > 0$$

Parâmetros

O modelo apresenta um parâmetro de localização μ e um de escala σ.

Exemplos



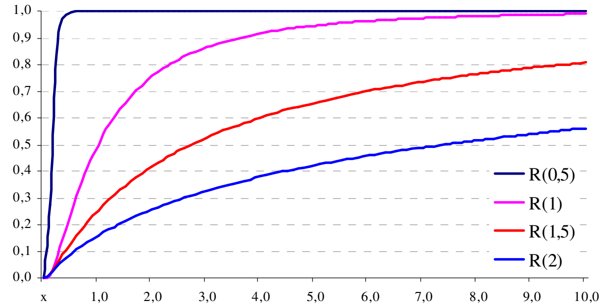
A FDA

A FD de Distribuição Log-Normal é:

$$F(x) = G\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{se } x \geq 0, \quad \sigma > 0$$

Onde G é a FD da N(μ; σ)

Exemplos



Valor Esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição da Log-Normal é dada por:

$$\mu = E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$$

A Variância

A Variância da Distribuição Log-Normal é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Exercício

Considerando uma LN(μ, σ), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) A assimetria;
(4) A curtose;
(5) O coeficiente de variação

Solução

$$\mu_e = \exp(\mu)$$

$$\mu_o = \exp(\mu - \sigma^2)$$

$$\gamma_1 = \exp(\sigma^2 + 2)\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1)}$$

$$\gamma_2 = \exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) = 3\exp(2\sigma^2) - 3$$

$$\gamma = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$$

Geração

A geração de valores dessa distribuição é feita através do método da convolução:

$$LN(\mu,\sigma^2) \approx \exp(\mu)\exp\left[\sigma\left(\sum_{i=1}^{12} U_i - 6\right)\right]$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma LN(0,1). Representar os resultados graficamente e calcular todas as principais medidas.

A Gama

Para se definir a **Distribuição** Gama é necessário definir inicialmente a **Função** Gama.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{para } n > 0$$

A função Gama é recursiva, isto é:

$$\Gamma(n) = (n - 1)\Gamma(n - 1)$$

Se n é um inteiro positivo, então:

$$G(n) = (n - 1)!$$

E uma vez que :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

A função gama é uma generalização do Fatorial.

Verificar, ainda, que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Uma vez definida a **Função** Gama, pode-se definir, então, a **Distribuição** Gama:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad \text{se } x > 0$$

$$= 0 \qquad \text{c.c.}$$

Parâmetros

Onde os parâmetros $r > 0$ e $\lambda > 0$ são denominados de parâmetro de forma (r) e parâmetro de escala (λ).

Se r for inteiro então a distribuição Gama é denominada de distribuição de Erlang.

Notação: $G(\lambda; r)$

Intervalo: $x \geq 0$

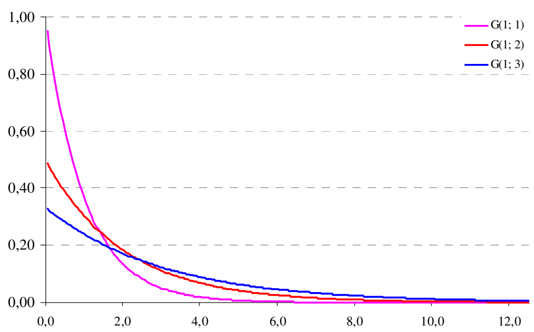
Agner Krarup Erlang (1878 – 1929)

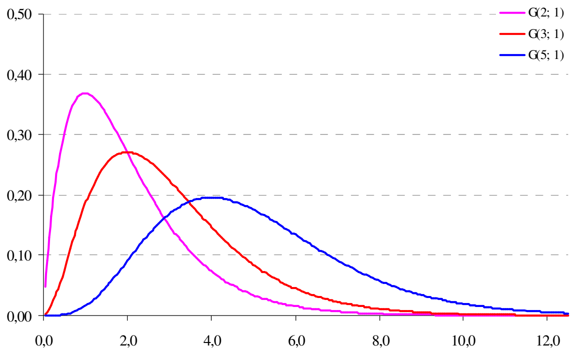
Gama - Exponencial

Existe uma relação bastante próxima entre a Gama e a Exponencial. Se **r** = 1, a distribuição gama se reduz a uma exponencial.

Se uma variável aleatória X é a soma de **r** variáveis independentes e exponencialmente distribuídas cada uma com parâmetro **λ**, então X tem uma densidade **Gama** com parâmetros **r** e **λ**.

Exemplos





A FDA

A função F(x) é dada por:

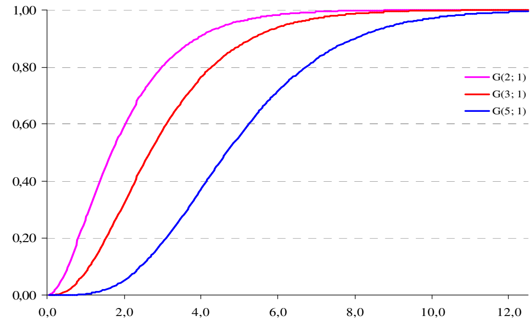
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \int_x^{\infty} \dfrac{\lambda^r u^{r-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(r)} du & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Se r é um inteiro positivo a FDA pode ser integrada por partes fornecendo:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda x} (\lambda x)^k / k! \quad \text{se} \quad x > 0$$

que é a soma dos termos de uma Poisson com média λx. Assim a FDA da Poisson pode ser usada para avaliar a Gama.

Exemplos



O Valor Esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição Gama é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{r}{\lambda}$$

A Variância

A Variância da Distribuição Gama é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

Exercício

Seja X uma G(λ; r). Determinar:

1. A moda
2. A mediana
3. A assimetria
4. A curtose
5. O coeficiente de variação

Solução

$$\mu_e = ? \qquad \mu_o = \frac{r-1}{\lambda}$$

$$\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{1}{r}} \qquad \gamma_2 = \frac{6}{r}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{r}}$$

Geração

A geração dos valores de uma G(λ, r), com r inteiro, isto é, uma E(λ, r) é feita por meio de:

$$E(\lambda, r) \approx -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{i=1}^{r} U_i\right)$$

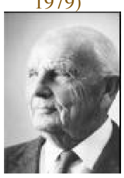
Exercício

Gerar 10000 valores de uma G(2; 1). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

A Weibull

A **Distribuição** de Weibull (1951) é aplicável a uma série de fenômenos (velocidade de ventos), sendo uma das principais áreas os tempos de falha de componentes elétricos e mecânicos.

Ernest Hjalmar Waloddi WEIBULL (1887 - 1979)



A função densidade de probabilidade de Weibull é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\delta}\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{se } x \geq \gamma \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\delta}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

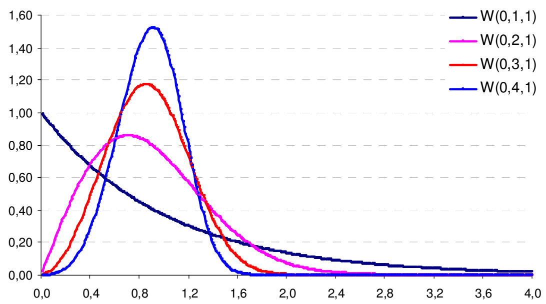
Parâmetros

Os parâmetros são γ ($-\infty < \gamma < \infty$) o de **locação**, $\delta > 0$ o de **escala** e $\beta > 0$ o de **forma**.

Quando $\gamma = 0$ e $\beta = 1$, a Weibull se reduz a uma exponencial de parâmetro $\lambda = 1/\delta$.

Notação: $W(\gamma; \delta; \beta)$ ou $W(\delta; \beta)$.

Exemplos



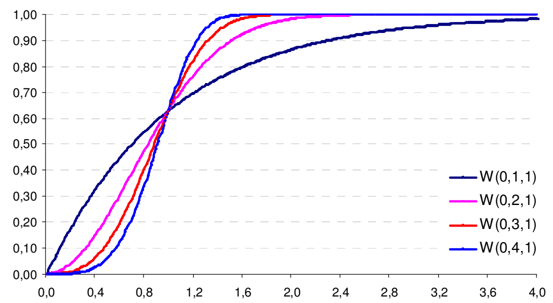
A FDA

A função F(x) é dada pela seguinte expressão relativamente simples:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{se } x \geq \gamma \\ 0 & \text{se } x < \gamma \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos



Valor Esperado

A expectância ou valor esperado de uma Distribuição de Weibull é dada por:

$$\mu = E(X) = \gamma + \delta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

A Variância

A Variância da Distribuição de Weibull é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \delta^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \right\}$$

Exercício

Seja X uma W(δ; β). Determinar:

1. A moda
2. A mediana
3. A assimetria
4. A curtose
5. O coeficiente de variação

Solução

$$\mu_e = \delta[\ln(2)]^{1/\beta}$$

$$\mu_o = \begin{cases} \delta\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta} & \\ 0 & \text{se } \beta < 1 \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1+3/\beta)\delta^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta^4\Gamma(1+3/\alpha) - 4\gamma_1\sigma^3\mu - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4} - 3$$

Geração

A geração dos valores de uma W(0; δ; β) , isto é, uma Weibull com parâmetro de localização nulo é:

$$W(0;\delta,\beta) \approx \delta[-\ln(U)]^{1/\beta}$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma G(0, 2; 1). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

A Beta

A **distribuição** Beta apresenta normalmente duas expressões. Uma denominada de fórmula geral e outra de forma padrão. A forma padrão definida no em [0; 1] é mais utilizada.

Forma Geral

A expressão geral da fdp Beta é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)(b-a)^{\alpha+\beta+1}} & \text{se } a \le x \le b \text{ e } \alpha,\beta > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Onde:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

A função Beta foi introduzida pela primeira vez por Euler.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha) \quad B(\alpha,1) = 1/\alpha$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Forma Padrão

A função densidade de probabilidade da Beta padrão é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & \text{se } 0 \le x \le 1 \text{ e } \alpha,\beta > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

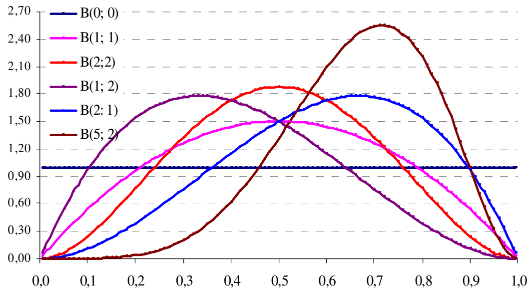
$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

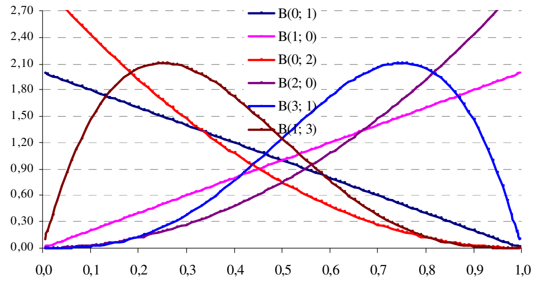
Os parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ são os de forma. Os valores a e b representam os extremos da distribuição. No formato padrão a = 0 e b = 1.

Aplicações

Para a descrição de tempos para completar tarefas no planejamento e projeto de sistemas. Usada extensivamente em PERT/CPM.

Exemplos





Exercício

Determinar a representação gráfica da B(0,5; 0,5).

A FDA

$$F(x) = \frac{\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{B(\alpha,\beta)} = \frac{B_x(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

Onde $B_x(\alpha, \beta)$ é a função Beta Incompleta. Essa função substitui a integral definida da Beta por uma indefinida.

Assim $B_x(\alpha, \beta)$ é dada por:

$$B_x(\alpha,\beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

Enquanto que $B(\alpha, \beta)$ é dada por:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

A função $I_x(\alpha, \beta)$ é denominada de Beta incompleta regularizada.

O Valor Esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição Beta é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

A Variância

A Variância da Distribuição da Beta é dada por:

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Exercício

Considerando uma B(α; β), determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose;

(5) O coeficiente de variação.

Solução

$$\mu_o = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad \text{se} \quad \alpha > 1 \text{ e } \beta > 1$$

$$\mu_o = 0 \text{ e } 1 \quad \text{se} \quad \alpha < 1 \text{ e } \beta < 1$$

$$\mu_o = 0 \quad \begin{cases} \alpha < 1 \text{ e } \beta \geq 1 \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{cases}$$

$$\mu_o = 1 \quad \begin{cases} \alpha \geq 1 \text{ e } \beta < 1 \\ \alpha > 1 \text{ e } \beta = 1 \end{cases}$$

$$\text{Amodal} \quad \text{se } \alpha = \beta = 1$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta+1)}}$$

$$\gamma_1 = \frac{2(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta+2)}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}$$

$$\gamma_2 = \frac{3(\alpha+\beta+1)[\alpha\beta(\alpha+\beta-6)+2(\alpha+\beta)^2]}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$$

Geração

A geração de uma distribuição Beta de parâmetros α = a e β = b, inteiros é dada por:

$$G(1,a) \sim \ln(\prod_{i=1}^{a} U_i) \quad G(1,b) \sim \ln(\prod_{j=1}^{b} U_j)$$

$$B(a,b) \sim \frac{G(1,a)}{G(1,a)+G(1,b)}$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma B(2; 2). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

A Qui-Quadrado

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **Qui-Quadrado** se sua fdp for do tipo:

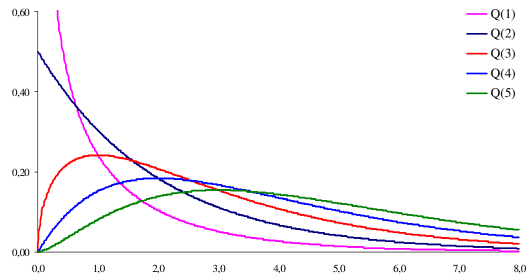
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\upsilon}{2}}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercício

Determinar a representação gráfica, em um mesmo diagrama, das seguintes distribuições:

$$\chi^2_1,\ \chi^2_2,\ \chi^2_3,\ \chi^2_4 \text{ e } \chi^2_5$$

Solução



Tabelas

O que é tabelado é a função inversa (**percentis**), em relação a área à direita (**unilateral**) de cada curva (**uma para cada linha**), ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor "**t**" tal que **$P(T \geq t) = \alpha$ (unilateral) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$.**

A FDA

Não existe uma expressão analítica para F(x) genérica. Ela é avaliada numericamente.

Valor Esperado

Mat02274

A expectância ou valor esperado da Distribuição Qui-Quadrado é dado por:

$\mu = E(X) = \upsilon$.

A Variância

Mat02274

A Variância da Distribuição da Qui-Quadrado é dada por:

$\sigma^2 = V(X) = 2\upsilon$.

Tabelas

Mat02274

O que é tabelado é a função inversa, em relação a área à direita de cada curva (**uma para cada linha**), isto é, dado um valor de área na cauda direita (α), a tabela retorna um valor "**x**" tal que **$P(\chi^2 \geq x) = \alpha$.**

Exercício

Mat02274

Considerando uma $\chi^2(\nu)$, determinar:

(1) A moda;

(2) A mediana;

(3) A assimetria;

(4) A curtose;

(5) O coeficiente de variação.

Solução

Mat02274

$$\mu_o = \nu - 2 \;\; \text{se} \;\; \nu > 2$$

$$\mu_e = \nu - 2/3$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{\nu}} \qquad \gamma_2 = \frac{12}{\nu}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\nu}}$$

Geração

Mat02274

A geração de valores de uma Qui-Quadrado com ν gl é divido em dois casos: ν par (primeiro algoritmo) e ν ímpar (segundo algoritmo)

$$\chi^2_\nu \sim -2\ln\left(\prod_{i=1}^{r} U_i\right), \;\; r = \nu/2$$

$$\chi^2_\nu \sim -2\ln\left(\prod_{i=1}^{r} U_i\right) + Z^2, \;\; r = (\nu-1)/2$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma χ^2_3 . Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

A "t" (Student)

A origem da distribuição **t** foi um artigo, publicado em 1908, por Gosset, químico da cervejaria Guinness de Dublin. Ele não pode publicar o artigo em seu nome daí o pseudônimo.

William Sealey Gosset (1876 - 1937)

Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 - 1962)

A distribuição t, e o teste t, se tornaram bem conhecidos por meio do trabalho de Fisher, que foi quem a nomeou de distribuição de Student. Ela surge sempre que se tenha que estimar o desvio padrão a partir de dados amostrais.

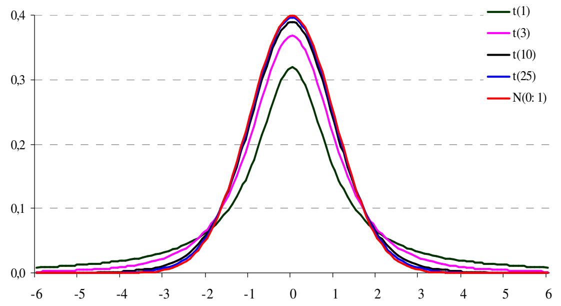
Uma variável aleatória X tem uma distribuição **"t"** ou de **Student** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\upsilon}.\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{\frac{\upsilon+1}{2}}} \qquad \nu > 0$$

Exercício

Determinar a representação gráfica, em um mesmo diagrama, das seguintes distribuições: t(1), t(3), t(10), t(25) e Z.

Solução



Tabelas

O que é tabelado é a função inversa (**percentis**), em relação a área à direita (**unilateral**) de cada curva (**uma para cada linha**), ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor "**t**" tal que **P(T ≥ t) = α (unilateral)** ou **P(|T| ≥ t) = α.**

A FDA

Não existe uma expressão analítica para F(x) genérica. Ela é avaliada numericamente.

Valor Esperado

A expectância ou valor esperado da Distribuição t é dado por:

$\mu = E(x) = 0.$

A Variância

A Variância da Distribuição da t é dada por:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2}$$

Exercício

Considerando uma t(ν), determinar:

(1) A moda;
(2) A mediana;
(3) A assimetria;
(4) A curtose;
(5) O coeficiente de variação.

Solução

$$\mu_o = 0 = \mu_e$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = \frac{3\nu - 6}{\nu - 4} \quad \nu > 4$$

Geração

A geração dos valores de uma distribuição t é feito através do quociente de uma normal e uma Qui-Quadrado.

$$t_n \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$$

Onde Z é a normal padrão.

Exercício

Gerar 10000 valores de uma t(3). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas. Representar o modelo graficamente.

A F (Snedecor)

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **"F"** ou de **Snedecor** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$E(X) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2$$

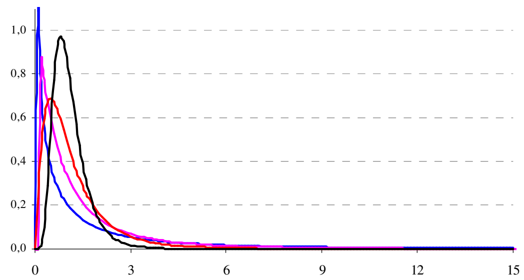
m é o grau de liberdade do numerador e **n** do denominador.

Variância

$$Var(X) = \frac{2\, n^2 (m+n-2)}{m(n-2)(n-4)}$$

Exemplos

F(1, 3) - F(2, 5) - F(5, 10) - F(20, 20)



Tabelas

O que é tabelado é a percentil 95% ou 99% - área à direita de cada curva (uma para cada par de valores – numerador, denominador) igual a 5% e 1%, isto é, "x" tal que $P[F(m, n) \geq x] = 5\%$ ou $P[F(m, n) \geq x] = 1\%$.

Geração

A geração de uma F(m, n) é feita por meio da sua relação com a distribuição Qui-Quadrado.

$$F(m,n) \sim \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}} = \frac{n\chi_m^2}{m\chi_n^2}$$

Exercício

Gerar 10000 valores de uma F(3; 2). Apresentar os resultados de forma tabular e gráfica, calculando todas as principais medidas.

Distribuições Empíricas Contínuas

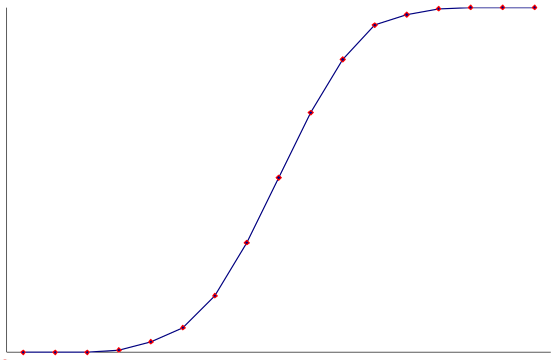
Seja X uma VAC com valores: x_1, x_2, ..., x_n, agrupada em k classes. Sejam $[a_1; a_2)$; ...$[a_{k-1}; a_k)$ os intervalos. Seja ainda $g(x_i)$ a probabilidade empírica da classe $1 \leq i \leq k$.

Assim um algoritmo para gerar uma VAC com uma distribuição empírica, agrupada em classes, é:

(i) Gerar U;

(ii) Se $G(x_{i-1}) \leq U < G(x_i)$ então:

$$X = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1}).U$$



Exercicio

x_i	$g(x_i)$
[-6; -4)	0,05
[-4; -2)	0,15
[-2; 0)	0,15
[0; 2)	0,25
[2; 4)	0,20
[4; 6)	0,1
[6, 8)	0,1

Gerar 500 valores de uma VAC de acordo com a distribuição empírica fornecida ao lado.