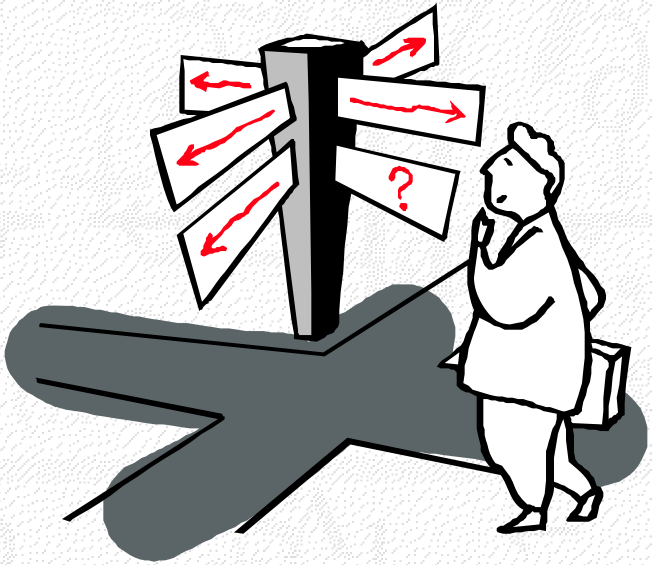


Testes Não Paramétricos

TUA (Testes de uma Amostra)

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www.mat.ufrgs.br/viali/
viali@mat.ufrgs.br

Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.

Algumas vantagens

- São menos exigentes do que os paramétricos. Dispensam, por exemplo, a normalidade dos dados;
- Independem da forma da população da qual a amostra foi obtida;
- Em geral, as probabilidades das estatísticas são exatas, salvo quando se usam aproximações para grandes amostras.

Algumas restrições ao seu uso

- Em, geral, não permitem testar interações. Isto restringe a sua aplicação aos modelos mais simples;
- A obtenção, utilização e interpretação das distribuições de probabilidade, são em geral, mais complexas.

Escolha do teste

Existem muitos testes estatísticos não paramétricos. Alguns itens devem ser levados em conta na sua escolha: a maneira como a amostra foi obtida, a natureza da população da qual se extraiu a amostra, o tipo de variável envolvida e o tamanho da amostra disponível.

Etapas do teste não paramétrico

- Formular as hipóteses;
- Definir ou fixar um valor crítico (α);
- Definir a região crítica (ponto de corte);
- Identificar e calcular a estatística teste;
- Tomar uma decisão;
- Formular (expressar) a conclusão.

Tipos de testes não paramétricos

Testes para

- Uma amostra
- Duas amostras
  - Dependentes
  - Independentes
- Várias amostras
  - Dependentes
  - Independentes

Testes de uma Amostra

- Qui-Quadrado
- Binomial
- KS (Kolmogorov-Smirnov)

O teste Qui-Quadrado

O teste qui-quadrado

O teste χ^2 de uma amostra pode ser utilizado para verificar se os valores de uma variável se enquadram em duas ou mais categorias.

Verifica-se se existe diferença significativa entre o número observado de valores, em cada categoria, e o número esperado, baseado na hipótese de nulidade.

Hipóteses

H_0: O modelo é adequado

H_1: O modelo não é adequado

A variável teste é:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Onde:

O_i = número de casos observados classificados na categoria i.

E_i = número de casos esperados na categoria "i" sob H_o, onde k = número de categorias.

Se há concordância entre os valores observados e os esperados, as diferenças (O_i - E_i) serão pequenas e, conseqüentemente, χ^2 será também pequeno. Se as divergências, entretanto, forem grandes, o valor de χ^2, será também grande.

Pode-se mostrar que a distribuição amostral de χ^2, sob $\mathcal{H}_o$, calculada pela fórmula acima, segue a distribuição qui-quadrado com um número de graus de liberdade igual a "k-1" onde "k" é igual ao número de categorias em que a variável foi classificada.

Exemplo

Suponha que uma moeda é lançada 800 vezes fornecendo 432 caras. Verifique se a moeda pode ser considerada viciada ao nível de 5% de significância. Realize o teste paramétrico correspondente para verificar se a mesma conclusão poderá ser obtida.

Hipóteses

H_0: A moeda é honesta

H_1: A moeda não é honesta

Dados:

Moeda	Resultados
Cara	432
Coroa	368
Total	800

	Resultado		
Moeda	O_i	E_i	$(Oi - Ei)^2/E_i$
Caras	432	400	2,56
Coroas	368	400	2,56
Total	800	800	5,12

χ_1^2

A variável teste é:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Então:

$$\chi^2 = \frac{(432 - 400)^2}{400} + \frac{(368 - 400)^2}{400} =$$

$$= 2,56 + 2,56 = 5,12$$

Qual X^2 utilizar?

O número de graus de liberdade é dado por:

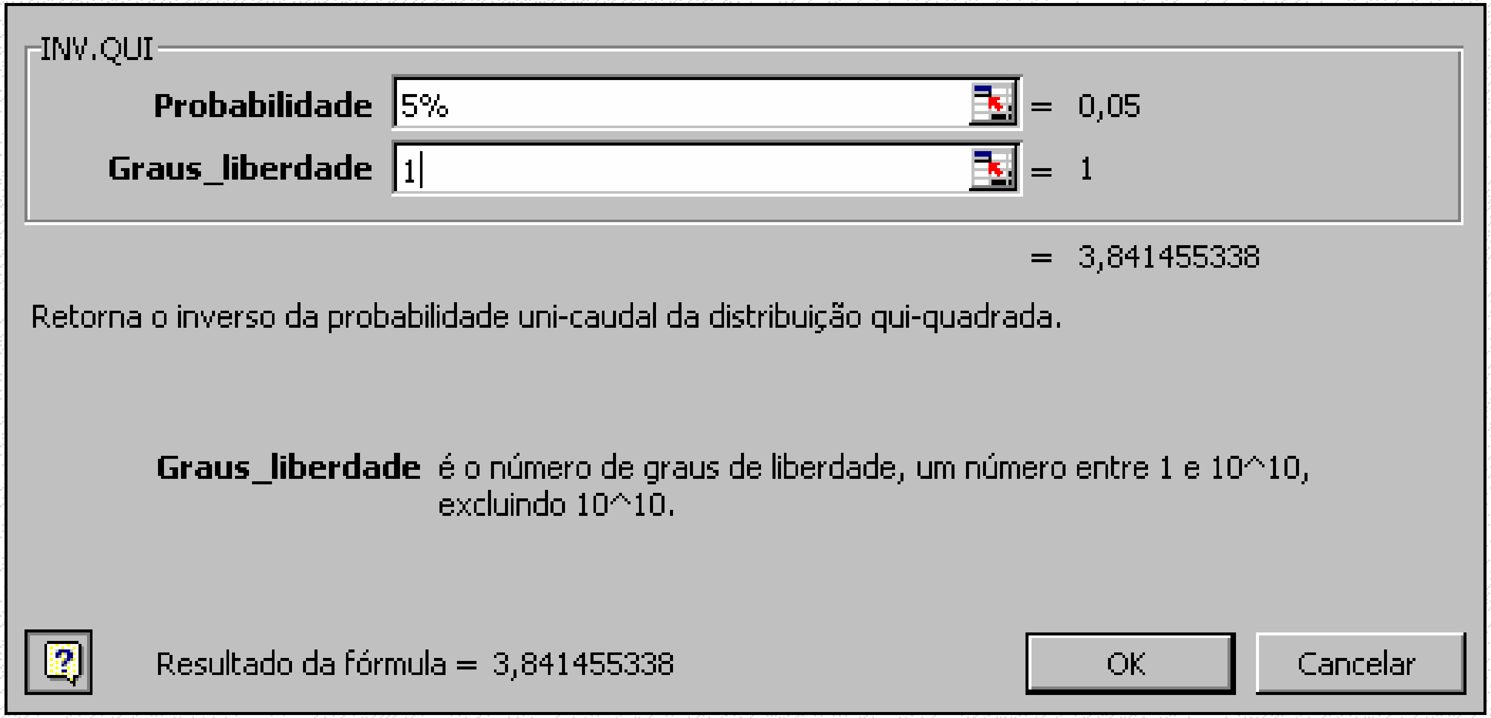
$$v = k - 1,$$

onde k = número de linhas das tabela.

Como $k = 2$, então $v = 1$.

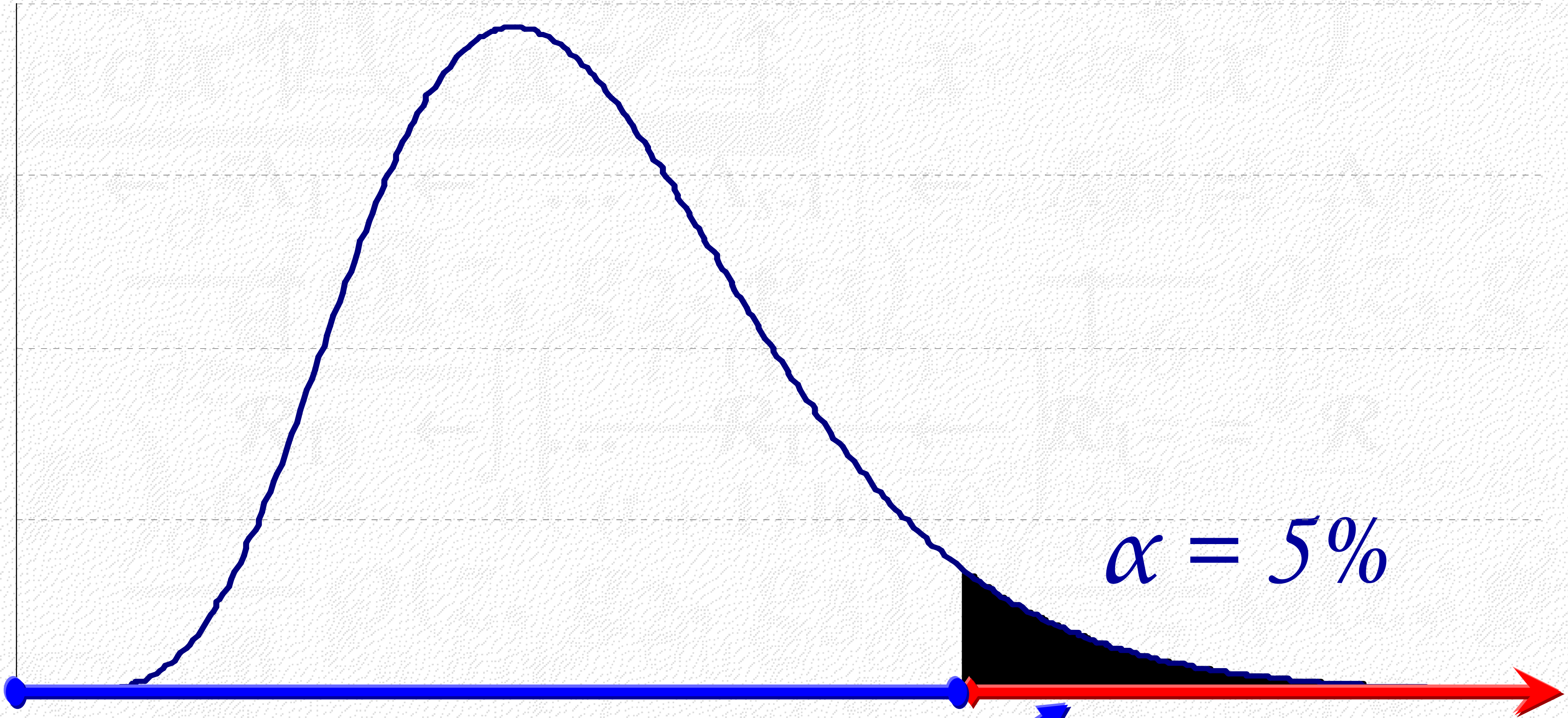
Ponto de Corte

Como $\alpha = 5\%$ *e* $\nu = 1$*, tem-se:*



Assim: $\chi_1^2 = 3{,}84$

Região Crítica



Região de Não Rejeição

$RC = [\,3{,}84\,;\infty\,)$

$\chi_c^2 = 5{,}12$

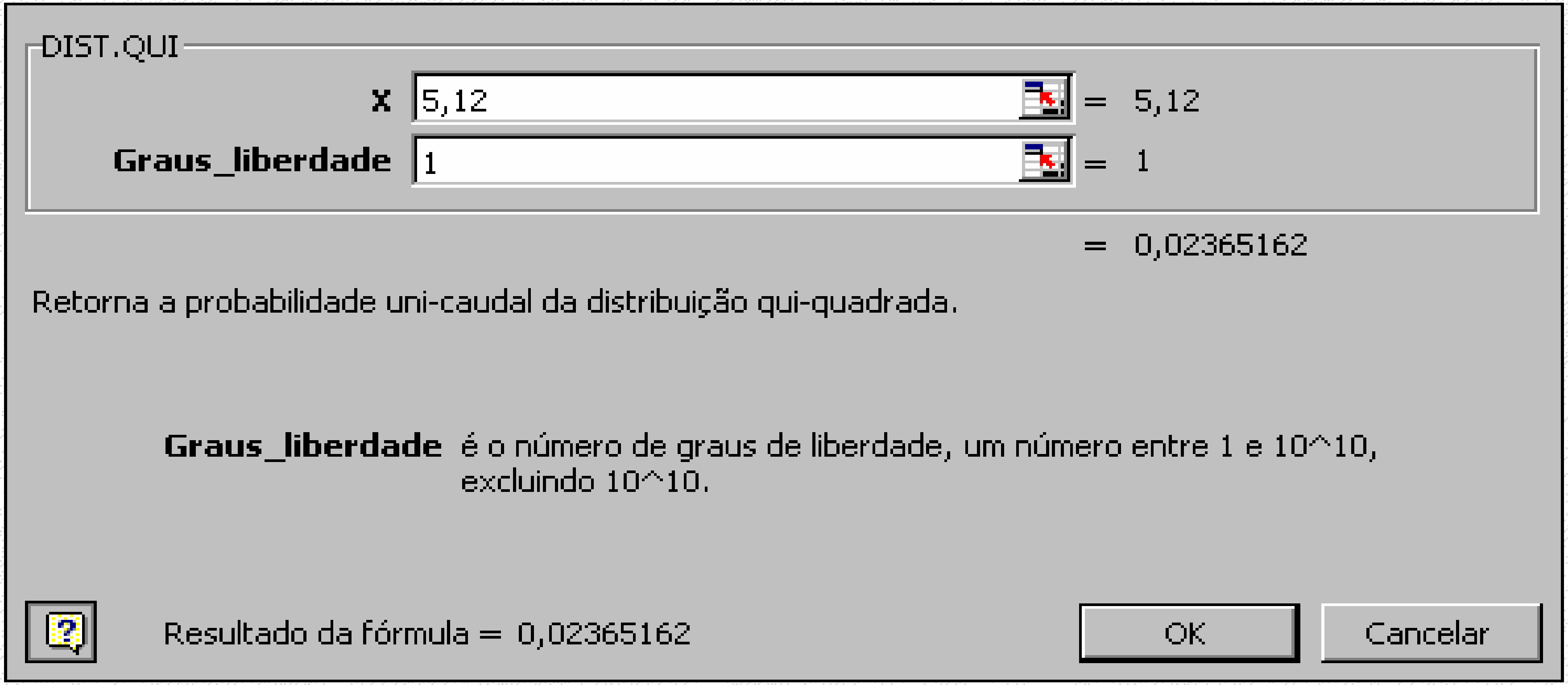
DECISÃO e CONCLUSÃO:

O valor crítico χ^2 é tal que: $P(\chi^2 > 3,84) = 5\%$. Então $RC = [3,84; \infty)$.

Como $\chi^2 = 5,12 \in RC$ ou $5,12 > 3,84$, Rejeito H_0, isto é, a 5% de significância, pode-se afirmar que a moeda é viciada.

OPÇÃO

Trabalhar com o valor p, isto é, com a significância dor resultado obtido. Como este valor é 5,12, tem-se:



Assim o valor-p = 2,37% que é menor que a significância do teste que é 5%. Portanto, rejeita-se a hipótese de que a moeda é honesta e afirma-se, com base nesta amostra, e a uma significância de 5%, que ela é viciada.

O teste Binomial

Objetivos

O teste é aplicado a variáveis dicotômicas. Assim a população é supostamente uma Bernoulli de parâmetro “p” de onde uma amostra de tamanho “n” é retirada.

Suposições

(a) O resultado de cada tentativa é classificado como "sim" ou "não" ou ainda como "sucesso" ou "falha";

(b) A probabilidade de sucesso "p" é constante em todas as tentativas;

(c) As n tentativas são independentes.

Hipóteses

$$\mathcal{H}_0: p = p_0$$

$$\mathcal{H}_1: p \neq p_0$$

$$p > p_0$$

$$p < p_0$$

A variável teste:

X = número de sucessos nas n tentativas independentes é uma Binomial de parâmetros "n" e "p", isto é, $X \sim B(n; p)$.

Fixado um nível de significância α, rejeitamos $\mathcal{H}_0$ se:

$P(X \leq x) = F(x) \leq \alpha$, no teste unilateral à esquerda;

$P(X \geq x) = 1 - F(x\text{-}1) \leq \alpha$ no teste unilateral à direita;

$P(X \leq x_0) + P(X \geq x_1) =$

$= F(x_0) + 1 - F(x_1) \leq \alpha$, onde

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com $\alpha_1 \neq \alpha_2$, em geral.

Se "n" for grande ($np \geq 5$ e $nq \geq 5$) então é possível aproximar pela distribuição normal.

Exemplo

Admitindo-se a proporção de 3:1 em F_1, da lei de Mendel, para 80 observações obteve-se o seguinte resultado:

Dominante: 56

Recessivo: 24

Verifique se esses dados estão de acordo com a lei.

Teste pela Binomial

Aproximando pela Normal

Resolva com o SPSS

O teste de Kolmogorov-Smirnov ou K-S

Objetivos

O teste de Kolmogorov-Smirnov, ou simplesmente K-S, tem o mesmo objetivo do teste qui-quadrado, mas além de mais poderoso, pode ser aplicada a amostras, em geral, menores. Em 1933 Kolmogorov definiu a estatística e em 1939 Smirnov a utilizou para construir o teste.

Limitações

- Só é aplicável a variáveis contínuas;
- Tende a ser mais sensível próximo ao centro da distribuição do que nas caudas;
- A distribuição precisa ser totalmente especificada. Se os parâmetros forem estimados a partir dos dados a região crítica não é mais válida.

Hipóteses

$\mathcal{H}_0$: O modelo é adequado

$\mathcal{H}_1$: O modelo não é adequado

A variável teste é:

$$\mathcal{D} = \max_{1 \leq i \leq n}\left(\left(\mathcal{F}(x_i) - \frac{i-1}{n}; \frac{i}{n} - \mathcal{F}(x_i) \right) \right)$$

Onde:

$F(x) = P(X \leq x)$ é a função de distribuição acumulada do modelo, isto é, de acordo com a hipótese nula.

Se a diferença observada "D", de acordo com a expressão dada for maior do que o valor crítico tabelado em função de "α" e "n", rejeita-se a hipótese nula.

A tabela

Para valores de n até 50 existe uma tabela que fornece os valores críticos da diferença "D", para os valores de $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

Se $n > 50$ os valores críticos para os valores de alfa acima são dados por:

$$\frac{1,36}{\sqrt{n}} \quad e \quad \frac{1,63}{\sqrt{n}}$$

Respectivamente.

Exemplo

Uma amostra de $n = 10$ valores, forneceu o seguinte resultado:

12,29	9,16	8,07	7,17	9,74
10,66	13,10	11,56	9,56	7,41
10,81	10,65	11,73	9,41	10,70
9,65	9,28	8,60	8,84	10,10

Teste a hipótese de que ela possa ter sido originada de uma população normal de média 10 e desvio padrão 2.

x	F(x)	G(x)	Esquerda	Direita
7,11	0,0741	0,1000	0,0741	0,0259
8,84	0,2804	0,2000	0,1804	0,0804
8,89	0,2900	0,3000	0,0900	0,0100
9,54	0,4086	0,4000	0,1086	0,0086
10,98	0,6877	0,5000	**0,2877**	0,1877
11,09	0,7075	0,6000	0,2075	0,1075
11,64	0,7942	0,7000	0,1942	0,0942
12,30	0,8747	0,8000	0,1747	0,0747
13,24	0,9476	0,9000	0,1476	0,0476
14,05	0,9786	1,0000	0,0786	0,0214

Verifica-se, portanto que a maior diferença em valores absolutos é: 0,2877.

Consultando a tabela dos valores críticos da distribuição desta diferença tem-se:

0,410 para uma significância de 5% e

e 0,490 para uma significância de 1%.

Conclusão

Como a maior diferença obtida $D = 0{,}288$ não supera os valores críticos 0,410 e 0,490, aceito H_0, isto é, a 5% (1%) de significância não se pode afirmar que a população não é proveniente de uma $N(10;\ 2)$.

Opção

Realizar o teste utilizando o SPSS.

Exercício!