

Testes de Hipóteses CB (Conceitos Básicos)

Prof. Lorí Viali, Dr.

<http://www.mat.ufrgs.br/viali/>

viali@mat.ufrgs.br



Testes de Hipóteses

CB (Conceitos Básicos)



Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).



Tipos de Testes de Hipóteses



Paramétricos

Testes

Não-paramétricos



Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.



Testes

Paramétricos



Envolvem parâmetros populacionais.

Um parâmetro é qualquer medida que descreve uma população.



Os principais parâmetros são:

μ (a média)

σ^2 (a variância)

σ (o desvio padrão)

π (a proporção)



Etapas de um teste de hipóteses



(1)

Formular a hipótese nula (\mathcal{H}_0)

$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.



(2)

Formular a hipótese alternativa (\mathcal{H}_1)

(Testes simples)

$$\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1$$

(Testes compostos)

$\mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\theta < \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\theta \neq \theta_0$ (teste bilateral/bicaudal).



(3)

Definir um valor crítico (α)

- *Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).*
- *Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que se quer provar.*



(4)

Calcular a estatística teste

- *A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;*
- *A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.*



(5)

Tomar uma decisão

- *A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;*
- *Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (*p-value*) ao invés do valor crítico.*



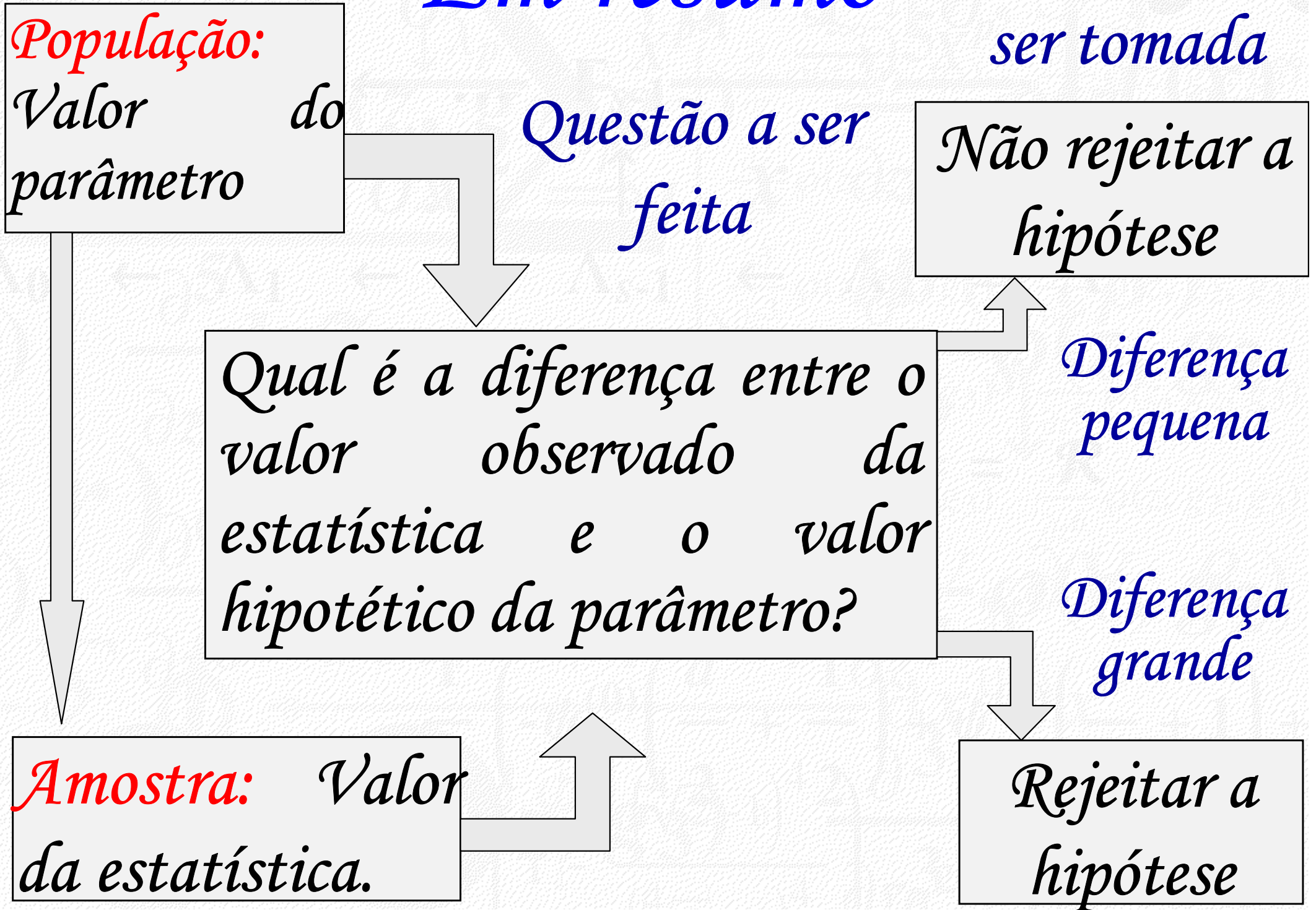
(6)

Formular uma conclusão

- *Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;*
- *Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.*



Em resumo



Conceitos

Básicos



Exemplo

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (\mathcal{M}_1) é equilibrada, isto é, $P(\text{Cara}) = P(\text{Coroa}) = 50\%$, enquanto que a outra (\mathcal{M}_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, $P(\text{Cara}) = 80\%$ enquanto que $P(\text{Coroa}) = 20\%$.



Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

X = número de caras,

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:



Hipóteses

H_0 : *A moeda lançada é a equilibrada (\mathcal{M}_1)*

($p = 50\%$)

H_1 : *A moeda lançada é a viciada (\mathcal{M}_2)*

($p = 80\%$)

$p =$ proporção de caras.



D e c i s ã o

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.



A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.



A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 , da variável $X =$ número de caras, em uma amostra de $n = 5$, lançamentos de cada uma das moedas.



Sob H_0 $X \sim B(5; 0,5)$

Assim:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,5^x 0,5^{5-x} = \\ &= \binom{5}{x} 0,5^5 = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x} / 32 \end{aligned}$$



Sob \mathcal{H}_1 $X \sim \mathcal{B}(5; 0,8)$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X = x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,2^x 0,8^{5-x} = \\ &= \binom{5}{x} \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x} \frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x / 3125 \end{aligned}$$



Distribuições amostrais ($n = 5$)

x	$P(X = x)$ sob \mathcal{H}_0	$P(X = x)$ sob \mathcal{H}_1
0	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1/3125 \rightarrow 0,032\%$
1	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$20/3125 \rightarrow 0,640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$160/3125 \rightarrow 5,120\%$
3	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$640/3125 \rightarrow 20,480\%$
4	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40,960\%$
5	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1024/3125 \rightarrow 32,768\%$
<i>Total</i>	$1 \rightarrow 100\%$	$1 \rightarrow 100\%$

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar H_0 e como conseqüência, rejeitar ou aceitar H_1 , é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar H_0



Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0 , se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.



*Assim o conjunto de valores que levará a rejeição da hipótese nula será denominado de região crítica (**RC**) e, neste caso, este conjunto é igual a:*

$$RC = \{ 4, 5 \}$$



Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (\mathcal{RA}) e, neste caso, este conjunto vale:

$$\mathcal{RA} = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$



Erro do Tipo I ou Nível de Significância do Teste

Então se H_0 for rejeitada porque X assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar cometendo um erro.

A probabilidade deste erro é igual a probabilidade de ocorrência destes valores sob

H_0 , isto é:



$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Erro do Tipo I}) = \\ &= P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(X = 4 \text{ ou } 5 / p = 0,50) = \\ &= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18,75\% = \\ &= \text{Nível de significância do teste.}\end{aligned}$$



Erro do Tipo II

O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de **erro do tipo II**.



Erro do Tipo II

$$\beta = P(\text{Erro do Tipo II}) =$$

$$= P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$P(X = 0, 1, 2 \text{ ou } 3 / p = 80\%) =$$

$$= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 = =$$

$$821/3125 = 26,27\%$$



$$\beta = (1+20+160+640)/3125$$

$$821/3125 = 26,27\%$$

x	$P(X = x)$	
0	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1/3125 \rightarrow 0,032\%$
1	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$20/3125 \rightarrow 0,640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$160/3125 \rightarrow 5,120\%$
3	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$640/3125 \rightarrow 20,480\%$
4	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40,960\%$
5	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1024/3125 \rightarrow 32,768\%$
Total	$1 \rightarrow 10$	$1024 \rightarrow 32,768\%$

$$\alpha = 5/32 + 1/32$$

$$6/32 = 18,75\%$$

Em Resumo



<i>Realidade</i>	<i>Decisão</i>	
	<i>Aceitar H_0</i>	<i>Rejeitar H_0</i>
<i>H_0 é verdadeira</i>	<p><i>Decisão correta</i></p> $1 - \alpha = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$	<p><i>Erro do Tipo I</i></p> $\alpha = P(\text{Cometer Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) = \text{Nível de significância do teste}$
<i>H_0 é falsa</i>	<p><i>Erro do Tipo II</i></p> $\beta = P(\text{Cometer Erro do tipo II}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_1 \text{ é verdadeira})$	<p><i>Decisão correta</i></p> $1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = \text{Poder do teste.}$

E x e m p l o

1



Uma urna contém quatro fichas das quais θ são azuis e $4 - \theta$ são *vermelhas*. Para testar a hipótese nula de que $\theta = 2$ contra a alternativa de $\theta \neq 2$, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.



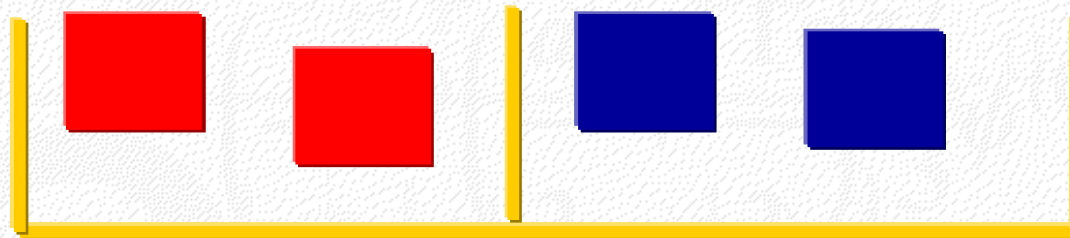
Espaço amostra

Região De
Não Rejeição

$$S = \{ \underbrace{VV, AA}_{\text{Região Crítica}}, \underbrace{AV, VA}_{\text{Região De Não Rejeição}} \}$$

Região
Crítica

Sob $H_0: \theta = 2$

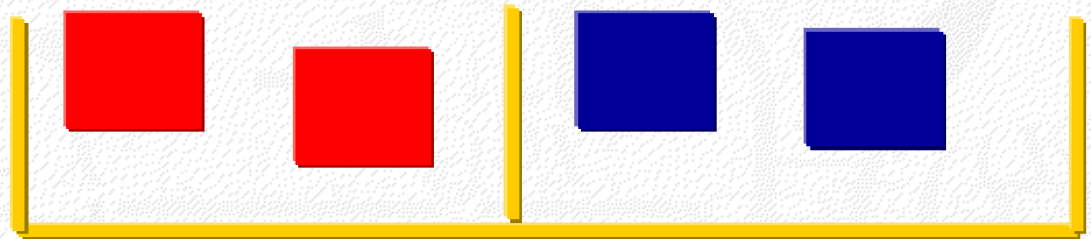


Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.



Sob $H_0: \theta = 2$



$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Erro do Tipo I}) = \\ &= P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(VV, AA / \theta = 2) = \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \\ &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33,33\%\end{aligned}$$



Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a $P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa})$



MAS

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= \mathcal{P}(VV, AA / \mathcal{H}_0 \text{ é falsa}) = \\ &= \mathcal{P}(VV, AA / \mathcal{H}_1 \text{ é verdadeira}) = \\ &= \mathcal{P}(VV, AA / \theta \neq 2). \end{aligned}$$

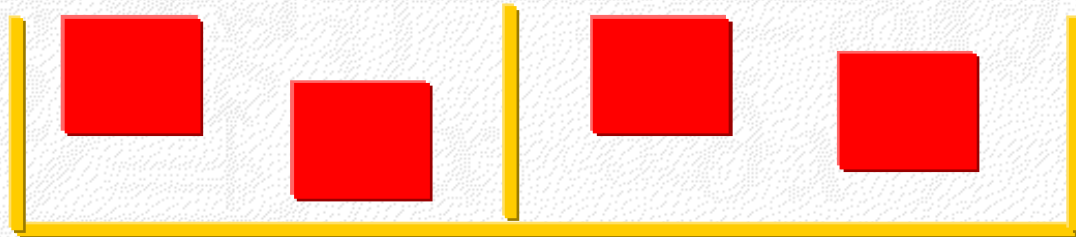
Assim devemos analisar quatro situações:

$$\theta = 0, \theta = 1, \theta = 3 \text{ e } \theta = 4$$

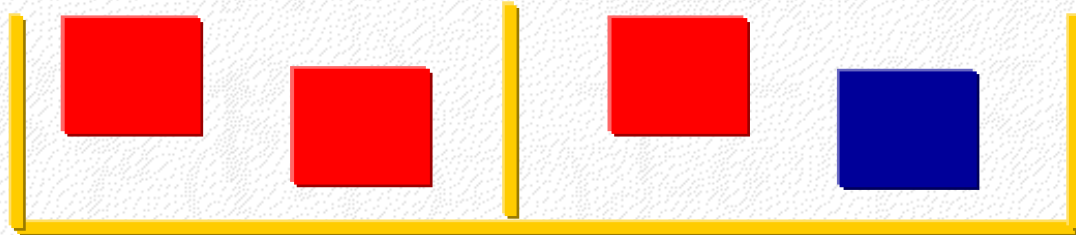


ISTO É:

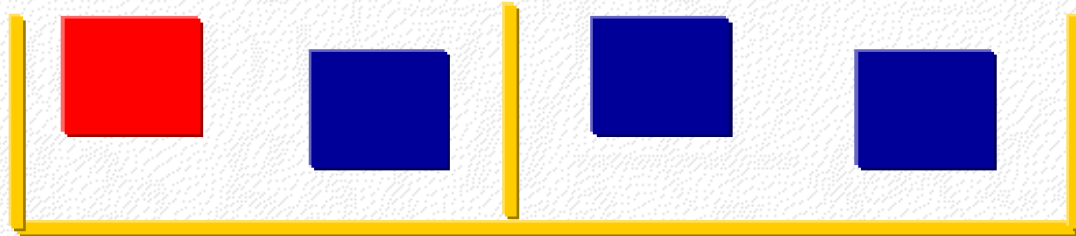
$$\theta = 0$$



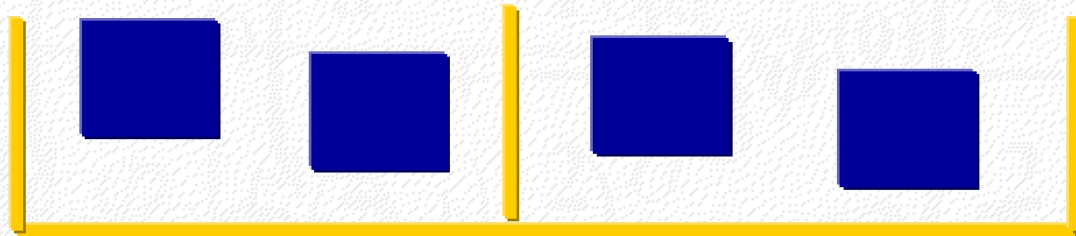
$$\theta = 1$$



$$\theta = 3$$

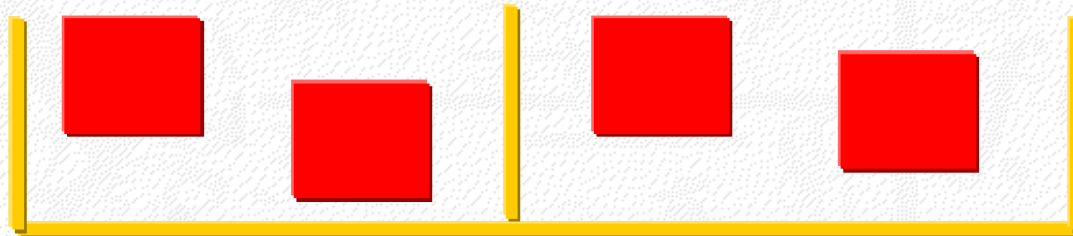


$$\theta = 4$$



$$\theta = 0$$

Neste caso



Então:

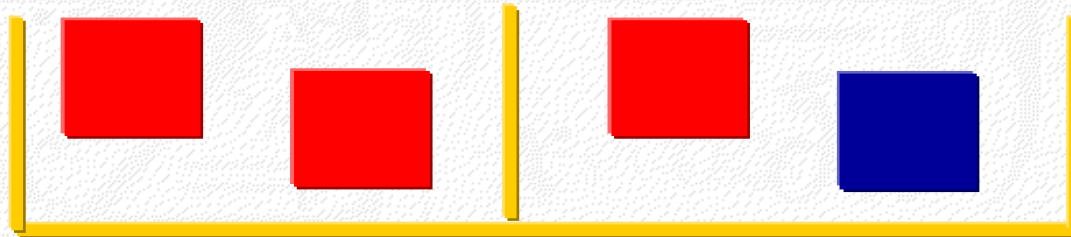
$$\begin{aligned} 1 - \beta &= \mathcal{P}(VV, AA / \theta \neq 2) = \\ &= \mathcal{P}(VV, AA / \theta = 0) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\%$$



$$\theta = 1$$

Neste caso



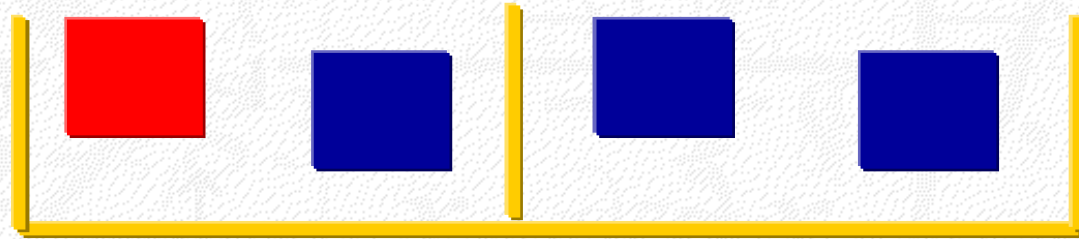
Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= \mathcal{P}(VV, AA / \theta \neq 2) = \\ &= \mathcal{P}(VV, AA / \theta = 1) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\% \end{aligned}$$



$$\theta = 3$$

Neste caso



Então:

$$1 - \beta = P(\mathcal{VV}, \mathcal{AA} / \theta \neq 2) =$$

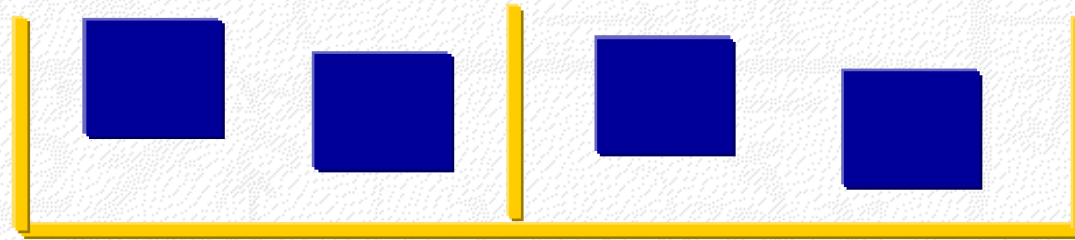
$$= P(\mathcal{VV}, \mathcal{AA} / \theta = 3) =$$

$$= 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$



$$\theta = 4$$

Neste caso



Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\mathcal{VV}, \mathcal{AA} / \theta \neq 2) = \\ &= P(\mathcal{VV}, \mathcal{AA} / \theta = 0) = \\ &= \mathbf{0} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1} = \mathbf{100\%} \end{aligned}$$



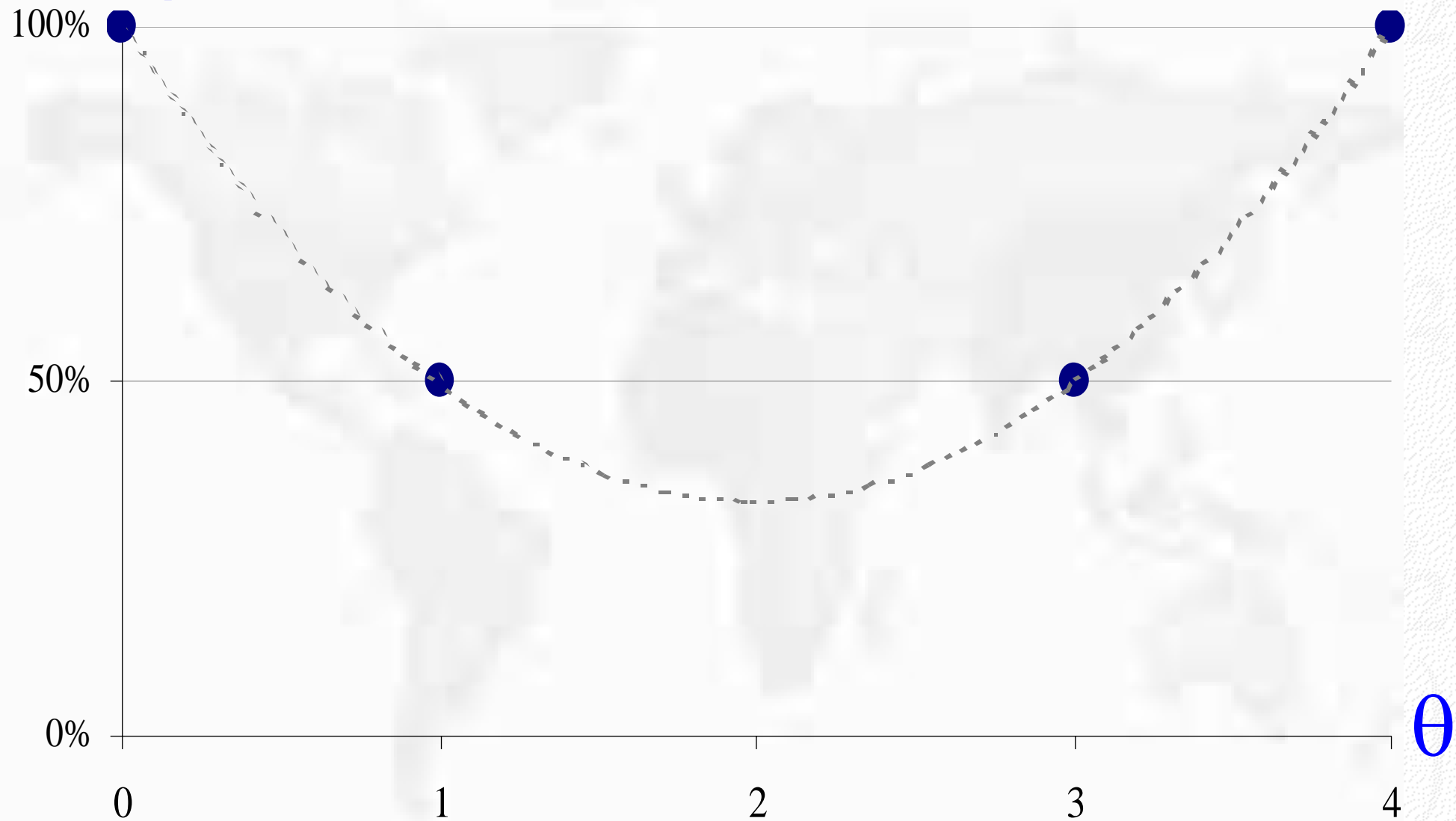
Em Resumo, tem-se:

θ	β	$1 - \beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	



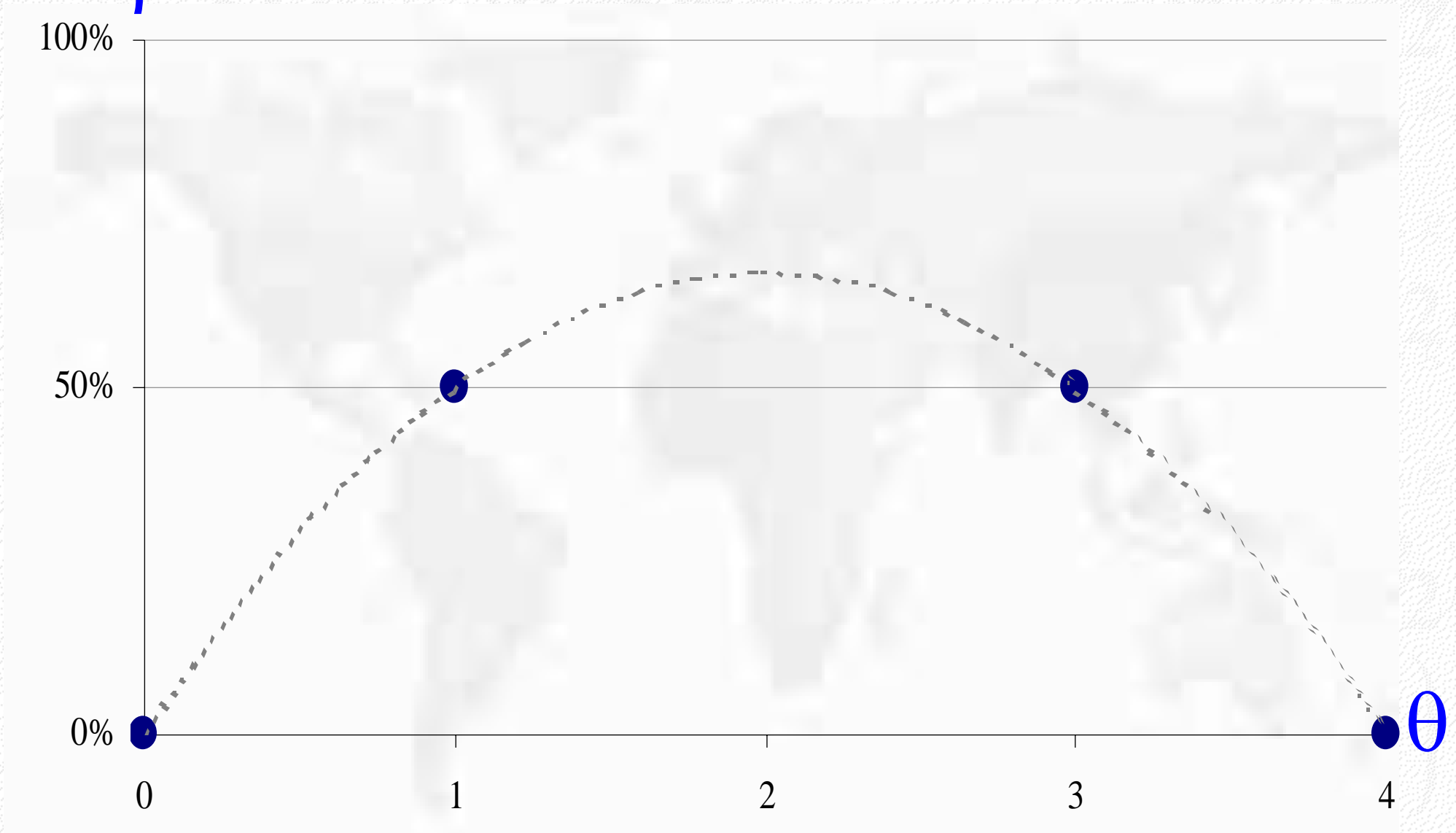
Poder do Teste

$1 - \beta$



Erro do Tipo II

β



Exemplo

2



Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$. Rejeita-se a hipótese nula se $X =$ “número de faces um for maior ou igual a quatro”. Determinar o nível de significância e o poder do teste.



Espaço amostra

*Região De
Rejeição (Crítica)*

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

*Região de Não
Rejeição*

$$H_0: p = 1/6$$

$$H_0: p > 1/6$$



Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.



Sob $\mathcal{H}_0: p = 1/6$

$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } \mathcal{H}_0 / \mathcal{H}_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(X \geq 4 / p = 1/6) =$$

$$= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15 \cdot 25}{6^6} + \frac{6 \cdot 5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0,87\%$$



Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é $P(X \geq 4 / H_0 \text{ é falsa})$



MAS

$$\begin{aligned} 1-\beta &= \mathcal{P}(X \geq 4 / \mathcal{H}_0 \text{ é falsa}) = \\ &= \mathcal{P}(X \geq 4 / \mathcal{H}_1 \text{ é verdadeira}) = \\ &= \mathcal{P}(X \geq 4 / p > 1/6). \end{aligned}$$

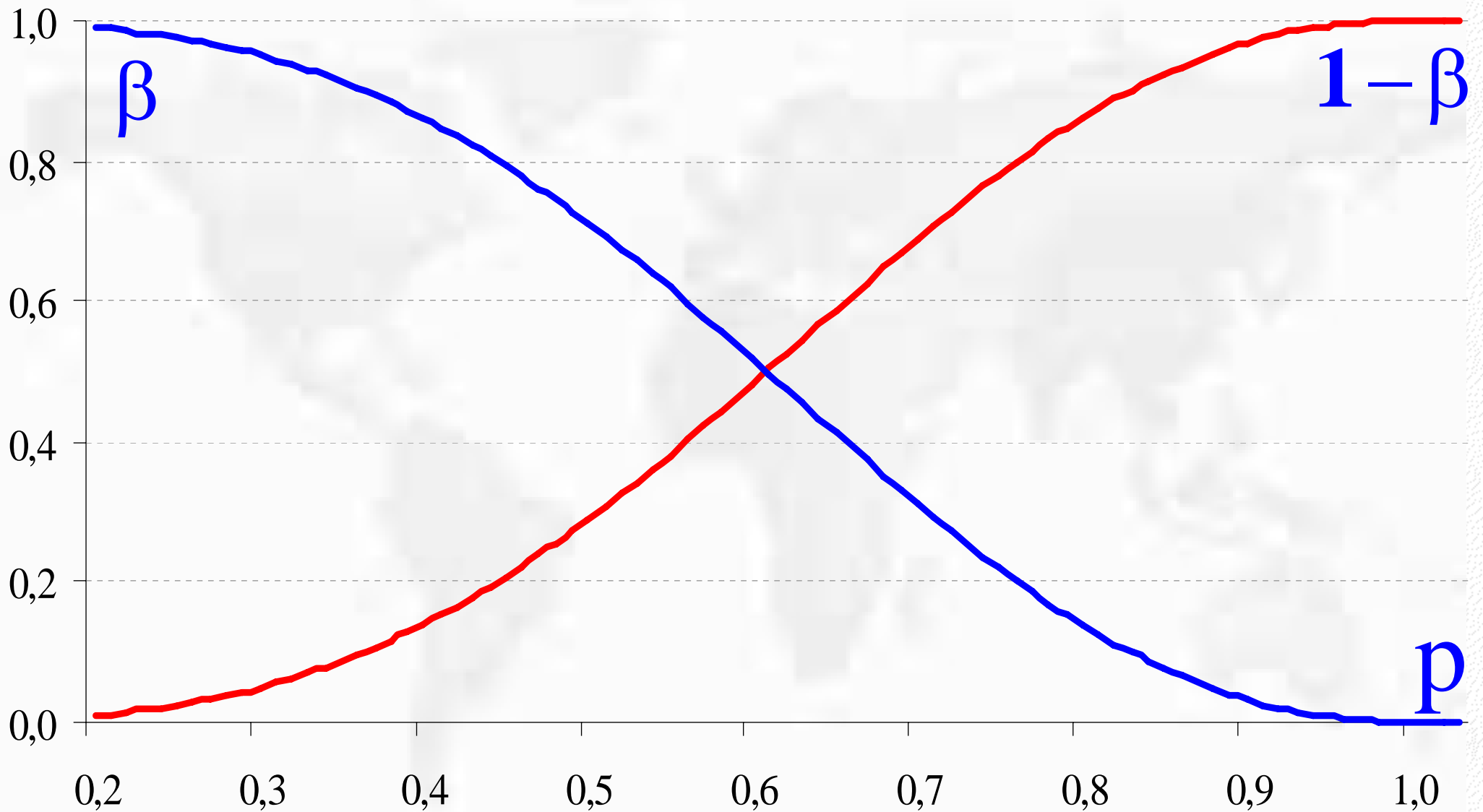
Neste caso, o poder do teste é uma função de p . Vamos avaliar esta função para alguns valores de “ p ”.



Poder do teste para $p > 1/6$

<i>p</i>	<i>1-β</i>	<i>p</i>	<i>1-β</i>	<i>p</i>	<i>1-β</i>
<i>0,20</i>	<i>1,70</i>	<i>0,55</i>	<i>44,15</i>	<i>0,90</i>	<i>98,41</i>
<i>0,25</i>	<i>3,76</i>	<i>0,60</i>	<i>54,43</i>	<i>0,95</i>	<i>99,78</i>
<i>0,30</i>	<i>7,05</i>	<i>0,65</i>	<i>64,71</i>	<i>1,00</i>	<i>100,00</i>
<i>0,35</i>	<i>11,74</i>	<i>0,70</i>	<i>74,43</i>		
<i>0,40</i>	<i>17,92</i>	<i>0,75</i>	<i>83,06</i>		
<i>0,45</i>	<i>25,53</i>	<i>0,80</i>	<i>90,11</i>		
<i>0,50</i>	<i>34,37</i>	<i>0,85</i>	<i>95,27</i>		

Poder do Teste χ Erro do Tipo II



E x e r c í c i o

Em cada uma das quatro faces de dois tetraedros regulares, aparentemente idênticos, estão marcados os valores: 1, 2, 3 e 4. Entretanto, um dos tetraedros é feito de material homogêneo (tetraedro \mathcal{A}), de maneira que, ao lançá-lo a probabilidade de qualquer uma das 4 faces fique em contato com a superfície é 0,25.



O outro tetraedro (tetraedro B) é “chumbado”, de tal maneira que, ao jogá-lo, a face com o valor 4 (quatro) tem probabilidade de 0,50 de ficar em contato com a superfície, enquanto que qualquer uma das outras três tem probabilidade igual a $1/6$.



Suponha que um dos tetraedros é lançado 48 vezes, para testar a hipótese \mathcal{H}_0 de que foi lançado o tetraedro \mathcal{A} , contra a hipótese \mathcal{H}_1 de que foi lançado o tetraedro \mathcal{B} . Supõem-se ainda a seguinte regra de decisão: “se nos 48 lançamentos, a face com o valor 4 (quatro), for obtida 20 ou mais vezes, rejeita-se \mathcal{H}_0 em favor de \mathcal{H}_1 . Determine o nível de significância e o poder do teste.

