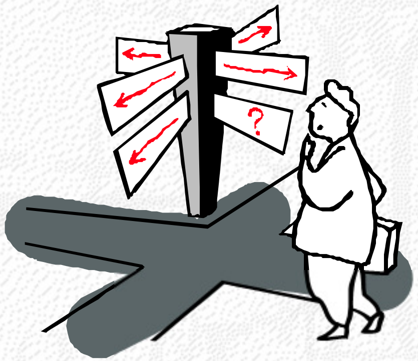


Testes Não Paramétricos

KAD (k Amostras Dependentes)

Prof. Lorí Viali, Dr.

http://www.mat.ufrgs.br/viali/

viali@mat.ufrgs.br

Testes para k amostras relacionadas

Os testes

- O teste Q de Cochran;
- O teste de Friedman (Análise de variância de duplo fator por postos)

O teste Q de Cochran

William Gemmell ***Cochran*** *(1909 - 1980)*

Objetivos

A prova de McNemar para duas amostras podem ser estendida para situações que envolvam mais de duas amostras. Esta extensão é denominada de teste Q de Cochran para k amostras relacionadas.

O teste fornece um método para comprovar se três ou mais conjuntos correspondentes de frequências ou proporções diferem entre si significativamente.

A correspondência pode basear-se em características de diversos elementos ou nos mesmos elementos observados sob condições diferentes. O teste adapta-se a dados em escala nominal ou na forma de ordinal dicotomizada.

Várias hipóteses de pesquisa podem ser analisadas através desta prova. Por exemplo, pode-se comprovar se vários itens de um teste diferem entre si em grau de dificuldade, analisando-se dados que consistem de informações do tipo "aprovado-reprovado" (pass-fail) sobre k itens para n elementos.

Por outro lado, pode-se ter apenas um item para analisar e querer comparar as respostas de n indivíduos sob k condições diferentes. Aqui, novamente, se obtém a "correspondência" considerando-se os mesmos indivíduos em cada grupo, mas agora os grupos diferem pelo fato de que cada um está sujeito a uma condição diferente.

Comprova-se, então, se as k condições terão efeito significativo sobre as respostas dos indivíduos ao item.

Por exemplo, pode-se perguntar a grupo de eleitores qual de dois candidatos eles preferem, em $k = 5$ vezes durante o período de campanha.

No início da campanha e no auge da campanha do candidato Tabuf, no auge da campanha do candidato Enrolando, pouco antes da votação e logo após a divulgação dos resultados. A prova determina se essas condições têm efeito significativo sobre as preferências dos eleitores.

Método

Se os resultados de um levantamento podem ser apresentados em uma tabela de dupla entrada com l linhas e k colunas, é possível testar a hipótese de que a proporção de respostas é a mesma em cada coluna.

Cochran mostrou (1950) que se a hipótese nula é verdadeira, isto é, "sucessos" ou "falhas" se distribuem aleatoriamente pelas linhas e colunas da tabela e se o número de linhas não é muito pequeno:

O valor: $$Q = \frac{k(k-1)\sum_{j=1}^{k}\left(G_j - \overline{G}\right)^2}{k\sum_{i=1}^{n} L_i - \sum_{i=1}^{n} L_i^2}$$

tem distribuição aproximadamente qui-quadrado com $v = k - 1$ = grau de liberdade.

Onde:

G_j = *total de sucessos na coluna j;*

$\overline{G}$ = *média dos* G_j*;*

L_i = *total de sucessos na linha i;*

Uma expressão equivalente, mas que facilita o cálculo é:

$$Q = \frac{(k-1)\left[k\sum_{j=1}^{k} G_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} G_j\right)^2\right]}{k\sum_{i=1}^{n} L_i - \sum_{i=1}^{n} L_i^2}$$

A probabilidade associada à ocorrência, sob H_0, de valores observados de Q pode ser determinada através do qui-quadrado.

Se o valor de Q calculado por uma das expressões não é inferior a um valor especificado a um determinado nível de significância gl = k - 1, a conclusão é que a frequência de "sucessos" difere entre as várias amostras. Isto é, H_0 pode ser rejeitada àquele nível de significância.

E x e m p l o

Suponha que se tenha interesse em estudar a influência do entrevistador sobre as respostas de donas de casa a uma pesquisa de opinião. Pode-se treinar um entrevistador para realizar as entrevistas de três formas:

1 - demonstrando interesse, cordialidade, entusiasmo;

2 - demonstrando formalismo, reserva e cortesia;

3 - demonstrando desinteresse, modo abrupto, formalismo áspero.

O entrevistador visita três grupos de 18 donas de casa. Aplica a entrevista tipo I a um grupo, a tipo 2 a outro grupo e a tipo 3 ao terceiro grupo. Forma-se assim 18 conjuntos de donas de casa com 3 delas se "correspondendo" (com base em variáveis relevantes) em cada conjunto.

Os tipos de entrevista são atribuídos aleatoriamente. Tem-se assim 3 amostras relacionadas (correspondentes) com 18 elementos cada uma ($n = 18$). Pode-se comprovar então se as diferenças nas entrevistas influenciam o número de respostas afirmativas ("sim") dadas a determinada pergunta, pelos três grupos correspondentes.

H_0: A probabilidade de um "sim" é a mesma para os três tipos de entrevista;

H_1: A probabilidade de um "sim" difere conforme o tipo de entrevista.

Teste: *Q de Cochram porque os dados se referem a mais de dois grupos relacionados (k = 3) e se apresentam dicotomizados sob forma "sim" e "não";*

Significância: *Sejam α = 0,01 e n = 18;*

Ditribuição amostral: *Sob H_0, Q tem distribuição aproximadamente qui-quadrado com gl = 2.*

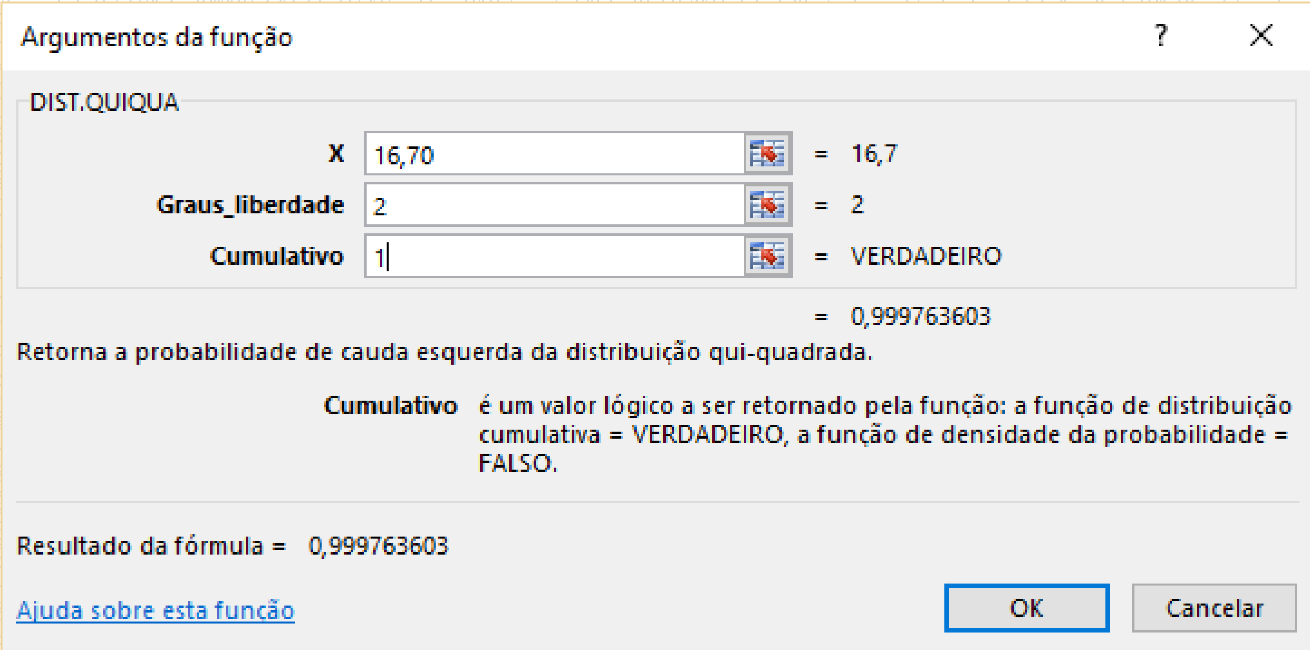
Conjunto	E_1	E_2	E_3
1	0	0	0
2	1	1	0
3	0	1	0
4	0	0	0
5	1	0	0
6	1	1	0
7	1	1	0
8	0	1	0
9	1	0	0

Conjunto	E_1	E_2	E_3
10	0	0	0
11	1	1	1
12	1	1	1
13	1	1	0
14	1	1	0
15	1	1	0
16	1	1	1
17	1	1	0
18	1	1	0

Conjunto	E_1	E_2	E_3
Total	13	13	3
	ΣL_i	ΣL_i^2	
	29	63	
	ΣG_j		
	13+13+3	= 29	

$$Q = \frac{(k-1)\left[k\sum_{j=1}^{k} G_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} G_j\right)^2\right]}{k\sum_{i=1}^{n} L_i - \sum_{i=1}^{n} L_i^2} = \frac{(3-1)\left[3.(13^2+13^2+3^2)-29^2\right]}{3.29-63} = 16,70$$

A significância desse resultado é:



Isto é: valor-p = 1- 0,9998 = 0,02%.

Note que $n = 18$ = número de linhas. Entretanto Cochran não faz referência ao tamanho mínimo das linhas para que a aproximação pela distribuição qui-quadrado seja boa.

S o l u ç ã o

S P S S

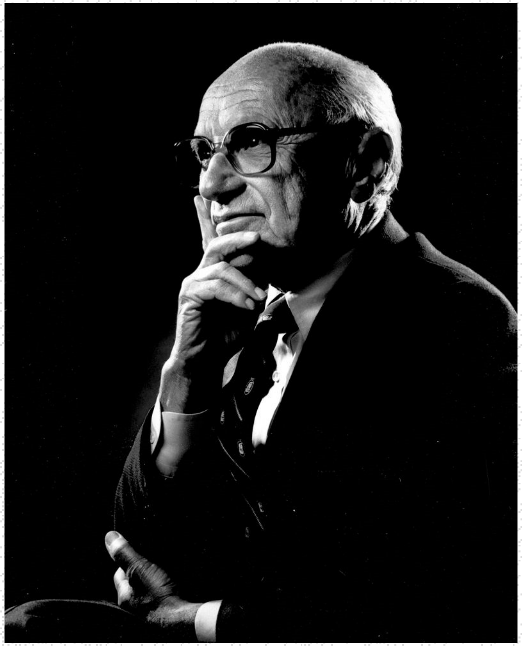
Cochran Test

	Values	
	0	1
C_1	5	13
C_2	5	13
C_4	15	3

n	18
Cochran's Q	16,667
df	2
Asymp. Sig.	0,000

O teste de Friedman

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DE DUPLA CLASSIFICAÇÃO POR POSTOS



Milton ***Friedman*** *(1912 - 2006)*

Objetivos

Quando os dados de *k* amostras estão em correspondência, isto é, o número de casos é o mesmo para cada uma delas, pode-se utilizar a análise de variância por postos de Friedman.

A dupla análise de variância ou χ^2 de Friedman é uma alternativa não paramétrica para testar diferenças entre duas ou mais amostras dependentes.

O teste de Friedman é uma extensão do teste dos sinais Binomial, para duas amostras dependentes, quando existem mais de duas amostras dependentes. Se $k = 2$ o teste de Friedman fornece um resultado equivalente ao teste Binomial.

Método

Os dados são dispostos em uma tabela de dupla entrada com *n* linhas e *k* colunas. As linhas representam os sujeitos e as colunas as condições. Se estão sendo estudados os escores de indivíduos observados sob as condições, então cada linha dá os escores de um indivíduo sob as *k* condições.

Bloco	Tratamento			
	T_1	T_2	...	T_k
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1k}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2k}
3	X_{31}	X_{32}	...	X_{3k}
...				
n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nk}

Os dados da prova são postos. Aos escores de cada linha atribuem-se postos separadamente. Isto é, com k condições os postos em cada linha variam de 1 a k. O teste verifica se é provável que as diferentes colunas de postos provenham de uma mesma população.

Se a hipótese de nulidade (amostras - colunas - provém da mesma população) é verdadeira, então a distribuição de postos de cada coluna é aleatória, sendo esperado que as somas dos postos 1, 2, ..., k sejam aproximadamente iguais.

Se os escores forem independentes das condições ($\mathcal{H}_0$ é falsa), então os totais de postos variam de uma coluna para outra. Como as colunas contém, todas elas, o mesmo número de casos, uma afirmativa equivalente seria que, sob $\mathcal{H}_0$, os postos médios das várias colunas seriam aproximadamente iguais.

A prova de Friedman determina se os totais dos postos (R_j) diferem significativamente. Para aplicar o teste, calcula-se o valor de uma estatística que Friedman representou por χ_r^2.

Quando o número de linhas e/ou colunas não é muito pequeno, pode-se mostrar (Friedman, 1937) que χ_r^2 tem uma distribuição aproximadamente qui-quadrado, com $gl = k - 1$, quando o número de linhas e/ou colunas não é muito pequeno.

Bloco	Tratamento			
	T_1	T_2	...	T_k
1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1k}
2	R_{21}	R_{22}	...	R_{2k}
3	R_{31}	R_{32}	...	R_{3k}
...				
n	R_{n1}	X_{n2}	...	R_{nk}
	R_1	R_2	...	R_k

Cálculo

A estatística teste é dada por:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 - 3n(k+1)$$

Onde:

k = número de tratamentos = colunas;

n = tamanho do bloco = linhas;

$R_j = \sum R_i$ = soma dos postos de cada tratamento = coluna;

$r = k - 1$ = grau de liberdade.

Quando o número de linhas e/ou colunas é pequeno, existem tabelas com as probabilidades exatas. A tabela N (Siegel, p. 311-12) fornece probabilidades exatas para valores de $k = 3$ e n variando de 2 a 9 e $k = 4$ e n variando de 2 a 4. Se os valores de n e k são superiores aos tabelados então pode-se utilizar a aproximação pelo qui-quadrado.

Empates

Quando ocorrerem empates entre os valores de uma linha pode-se atribuir a média dos escores empatadas a exemplo do que já foi realizado em outros testes.

Nesse caso o valor χ_r^2, calculado com correção, será dado por:

$$\chi_r^2 = \frac{(k-1)}{A_1 - C_1}\left[\sum_{i=1}^{k} R_i^2 - nC_1\right]$$

Ou

$$\chi_r^2 = \frac{(k-1)\sum_{i=1}^{k}[R_i - 0,5n(k+1)]^2}{A_1 - C_1}$$

Onde: $A_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} R_{ij}^2$ $\quad C_1 = \dfrac{nk(k+1)^2}{4}$

Uma forma alternativa de correção é dada por:

$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i)}{n(k^3 - k)}$$

Neste caso, o χ_r^2 *corrigido será dado por:*

$$\chi_{rc}^2 = \frac{\chi_r^2}{C}$$

Exemplo

Dez *webmasters* foram convidados de uma empresa de Internet para avaliar o novo *site* de uma instituição. Eles foram convidados a dar uma nota de 0 a 10 para cada uma de três características de interesse da empresa. Teste se as opiniões dos juízes diferem significativamente a 1%.

Webmasters	C_1	C_2	C_3
01	9,0	7,0	6,0
02	9,5	6,5	8,0
03	5,0	7,0	4,0
04	7,5	7,5	6,0
05	9,5	5,0	7,0
06	7,5	8,0	6,5
07	8,0	6,0	6,0
08	7,0	6,5	4,0
09	8,5	7,0	6,5
10	6,0	7,0	3,0

Resolva utilizando a planilha. Verifique a solução com o SPSS.

Refaça o exercício utilizando a correção para empates.

Conclusão

Como a significância do resultado é 0,53%, abaixo da significância do teste é possível rejeitar a hipótese de que não existe diferença entre as diversas características.

Comparações Múltiplas

Se a hipótese nula é rejeitada então é conveniente determinar qual ou quais tratamentos diferem entre si (comparações múltiplas).

Se os tratamentos são considerados diferentes é possível testar quais grupos diferem pelo critério de Bonferroni-Dunn. Para identificar a diferença mínima necessária entre as somas dos postos de duas condições quaisquer, representadas por CD_F utiliza-se a expressão:

$$CD_F = z_{aj}\sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}}$$

Onde o valor z_{aj} é um valor da normal padrão tal que em uma hipótese bilateral $\alpha/2c$, onde c é o número total de comparações que são realizadas. Se a hipótese for unilateral então α/c.

$$CD_F = z_{aj}\sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}}$$

Para empregar a fórmula acima é necessário determinar a diferença absoluta entre as somas dos postos de cada par de condições experimentais. A próxima tabela resume os resultados.

$\lvert R_1 - R_2 \rvert$	$\lvert 26,5 - 21 \rvert$	5,5
$\lvert R_1 - R_3 \rvert$	$\lvert 26,5 - 12,5 \rvert$	14
$\lvert R_2 - R_3 \rvert$	$\lvert 21 - 12,5 \rvert$	8,5

Se qualquer uma das diferenças entre as somas dos postos for maior ou igual ao valor obtido pela expressão anterior ela será considerada significativa.

Para determinar o valor de z, a uma significância unilateral, supondo que a significância do teste deva ser de 5% teremos que determinar z tal que $P(Z > z) = 0{,}05/3 = 0{,}0167$. Neste caso z_{aj} é igual a 2,1280. Portanto serão significativas as diferenças que excederem:

$$CD_F = z_{aj}\sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}} = 2{,}1280\sqrt{\frac{10.3.4}{6}} = 9{,}51.$$

Neste caso a única diferença que é considerada significativa é entre os grupos R_1 e R_3 que vale 14.

FRIEDMAN, Milton. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. Journal of American Statistical Association, v. 32, n. 200, p. 675-701, Dec. 1937.

SHESKIN, David J. Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures. 4th ed. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2007.