Material Didático

Série

Probabilidade

Univariada

Parte II

Enfoque: Exatas

Prof. Lorí Viali, Dr.

SUMÁRIO

Agradeço a revisão criteriosa feita por **Nilton Marcelo Silveira**

ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Seja E um experimento e S um espaço amostra associado. Se X é uma variável aleatória definida em S tal que X(S) seja infinito não-enumerável, isto é, X(S) seja um intervalo de números reais, então X é dita uma variável aleatória contínua.

Definição

Seja X uma variável aleatória contínua (VAC). A função f(x) que associa a cada $x \in X(S)$ um número real que satisfaz as seguintes condições:

(a) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X(S)$ e

(b) $\int_{X(S)} f(x)dx = 1$

É denominada de **função densidade de probabilidade (fdp)** da variável aleatória X.

Neste caso f(x) representa apenas a densidade no ponto x, ao contrário da variável aleatória discreta, f(x) aqui **não** é a probabilidade de a variável assumir o valor x.

1.1. CÁLCULO DE PROBABILIDADE COM UMA VAC

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). Sejam a < b, dois números reais. Define-se:

$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números "a" e "b" é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = a e x = b.

Neste caso, tem-se também:

(a) $P(X = a) = 0$, isto é, a probabilidade de que uma variável aleatória contínua assuma um valor isolado é igual a zero. Para variáveis contínuas só faz sentido falar em probabilidade em um intervalo, uma vez, que a probabilidade é definida como sendo a área sob o gráfico. f(x) não representa nenhuma probabilidade. Somente quando ela for integrada entre dois limites produzirá uma probabilidade.

(b) Se a < b são dois números reais então:

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$,

(c) Se uma função f* satisfizer às condições $f^*(x) \geq 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)dx = k$, onde "k" é um número real positivo, mas não igual a 1, então f*(x) pode ser transformada numa fdp mediante a seguinte transformação:

$f(x) = f^*(x) / k$, para todo x.

Neste caso a f(x) será uma função densidade de probabilidade.

(d) Se X assumir valores apenas num intervalo finito [a; b], pode-se simplesmente por f(x) = 0 para todo $x \notin [a; b]$. como conseqüência a fdp ficará definida para todos os valores reais de x e pode-se exigir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Assim, sempre que a f(x) for especificada apenas num intervalo finito, deve-se supor que seja zero para todos os demais valores não pertencentes ao intervalo.

Exemplo 1.1

Seja X uma VAC com fdp dada por:

$f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$

$= 0$, para quaisquer outros valores.

Determinar a P(X < 1/2)

Solução:

$P(X < 1/2) = \int_{0}^{1/2} (2x)dx = 1/4 = 25\%$

1.2. A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Seja X uma VAC com função densidade de probabilidade f(x). Então a **função de distribuição acumulada** (FDA), ou simplesmente **função de distribuição** (FD) de X é a função F definida por:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Solução:

Suponha-se que X seja uma VAC com fdp dada por:

$f(x) = 2x$ se $0 < x < 1$

$= 0$, para quaisquer outros valores.

Determinar a FD de X

Solução:

A função de distribuição de X é a função F tal que:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 2udu = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

1.3. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA (CARACTERIZAÇÃO)

Considere X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x).

1.3.1. Expectância, esperança, média ou valor esperado de X

A média, expectância, **valor esperado** ou esperança matemática da variável aleatória contínua X, representada por μ ou E(X), é calculada por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Obs. Não é garantido que esta integral exista (convirja) sempre.

1.3.2. A variância de X

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X). Então a variância de X, anotada por σ^2 ou V(X) é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

1.3.3. O desvio padrão

O desvio padrão da variável aleatória contínua X, anotado por σ, é a raiz quadrada da variância.

1.3.4. A variância relativa e o coeficiente de variação

Seja X uma variável aleatória contínua com média μ = E(X) e variância σ^2 = V(X). Então a variância relativa de X, anotada por: γ^2, é definida por:

$$\gamma^2 = \sigma^2 / \mu^2$$

O coeficiente de variação de X é definido como a raiz quadrada da variância relativa:

$$\gamma = \sigma / \mu$$

Exemplo 1.2

Determinar a expectância e a variância da VAC cuja fdp é dada por:

$f(x) = 3x^2$ se $-1 \leq x \leq 0$

$= 0$ caso contrário

Solução:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_{-1}^{0} x.(3x^2)dx = \int_{-1}^{0} (3x^3)dx = 3.\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -3/4 = -0{,}75$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.(3x^2)dx - (3/4)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^4 dx - (3/4)^2 = 3.\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} - (3/4)^2$$

$= 3/80$.

1.4. DISTRIBUIÇÕES ESPECIAIS DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

Assim como ocorre com as variáveis discretas, existem algumas distribuições especiais de probabilidade contínuas que por sua freqüência de uso vale a pena estudar mais detalhadamente. Entre elas vale destacar as distribuições: uniforme, exponencial e normal.

1.5. A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Definição:

Seja X uma VAC que pode tomar todos os valores num intervalo [a, b]. Se a probabilidade de a variável assumir valores num subintervalo for a mesma que para qualquer outro subintervalo de mesmo comprimento teremos então uma distribuição uniforme. A função densidade de probabilidade de uma VAC deste tipo será:

$f(x) = 1 / (b - a)$ para $a \leq x \leq b$

$= 0$ para qualquer outro valor.

1.5.1. Propriedades da distribuição uniforme

As principais medidas para a distribuição uniforme podem ser determinadas de uma forma geral em termos dos extremos "a" e "b" do intervalo.

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_{a}^{b} x.\frac{1}{b-a}dx = (a + b) / 2$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.\frac{1}{b-a}dx \; - \left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2 = (b - a)^2 / 12$$

Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

A FDA da distribuição uniforme

A FDA da distribuição uniforme, pode ser facilmente avaliada e, vale:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}du = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Exemplo 1.3

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [5, 10]. Determinar as probabilidades:

(a) $P(X < 7)$ **(b)** $P(X > 8,5)$

(c) $P(8 < x < 9)$ **(d)** $P(|x - 7,5| > 2)$

Solução:

Utilizando a FDA da variável vem:

(a) $P(X < 7) = F(7) = (7 - 5) / (10 - 5) = 2 / 5 = 40\%$

(b) $P(X > 8,5) = 1 - P(X < 8,5) = 1 - F(8,5) = 1 - (8,5 - 5) / (10 - 5) = 1 - 3,5 / 5 = 1 - 0,70 = 30\%$

(c) $P(8 < X < 9) = F(9) - F(8) = (9 - 5) / (10 - 5) - (8 - 5) / (10 - 5) = 4 / 5 - 3 / 5 = 1 / 5 = 20\%$

(d) $P(|X - 7,5| > 2) = P(X - 7,5 > 2 \text{ ou } X - 7,5 < -2) = P(X > 9,5 \text{ ou } X < 5,5) = 1 - F(9,5) + F(5,5) = 20\%$

1.5.2. A distribuição exponencial

Definição:

Uma variável aleatória contínua T tem uma distribuição exponencial de parâmetro λ se sua função densidade de probabilidade f(t) for do tipo:

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para t > 0

= 0 caso contrário

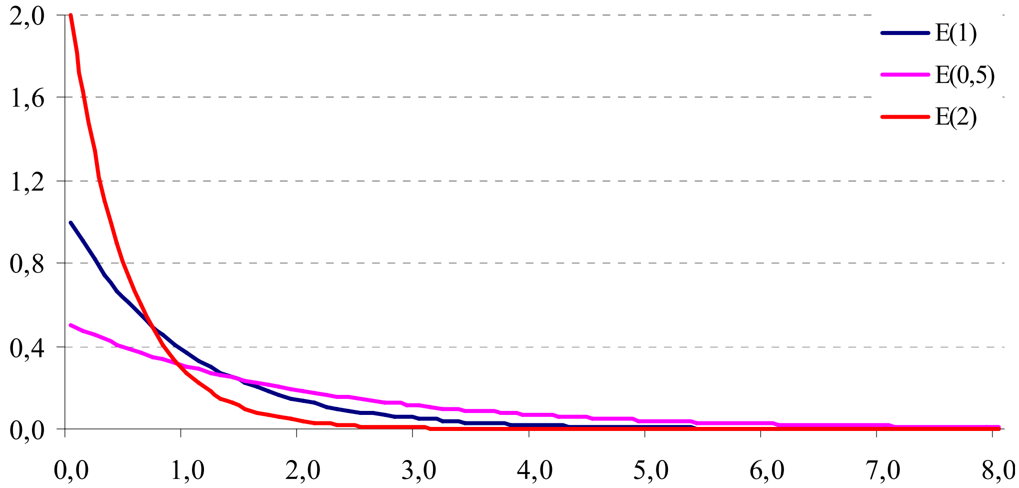


Figura 1.1 – Exemplos de distribuições exponenciais

Exemplo 1.4

Suponha que um componente eletrônico tenha um tempo de vida T (em unidades de 1000 horas) que segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ = 1. Suponha que o custo de fabricação do item seja R$ 2,00 e que o preço de venda seja R$ 5,00. O fabricante garante total devolução se t < 0,90. Qual o lucro esperado por item?

Solução:

Neste caso, tem-se:

$f(t) = e^{-t}$ para t > 0

A probabilidade de um componente durar menos de 900 horas é dada por:

$P(T < 0{,}90) = \int_0^{0,9} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{0,9} = -e^{-0,9} + e^{0} = 1 - 1/e^{0,9} = 59{,}34\%$

Desta forma o lucro do fabricante será uma VAD T com a seguinte distribuição:

t	-2	3
f(t)	0,5934	0,4066

Então o lucro esperado será:

E(T) = -2.0,5934 + 3.0,4066 = R$ 0,03

1.5.3. Propriedades da distribuição Exponencial

Se T for uma VAC com distribuição Exponencial, então:

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty t.f(t)dt = \int_0^\infty t.\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda$$

Variância

$$\sigma^2 = E(T^2) - \mu^2 = \int_0^\infty t^2.\lambda e^{-\lambda t}dt - \lambda^2 = 1/\lambda^2$$

O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

A FDA da distribuição Exponencial

A FDA da distribuição Exponencial é dada por:

$$F(t) = P(T \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}du = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{se } t \ge 0 \end{cases}$$

Portanto $P(T \ge t)$ 1 - F(t) = 1 - [1 - $e^{-\lambda t}$] = $e^{-\lambda t}$

A distribuição Exponencial não tem memória

A distribuição Exponencial apresenta uma propriedade interessante que é denominada de falta de memória, ou seja:

$P(T \ge s + t / T \ge s) = P(T \ge s + t \cap T \ge s) / P(T \ge s) = P(T \ge s + t) / P(T \ge s) = e^{-\lambda(s+t)} / e^{-\lambda s} = e^{-\lambda t}$

Portanto $P(T \ge s + t / T \ge s) = P(T \ge t)$

Relação com a distribuição de Poisson

Deve-se observar inicialmente que fixado um tempo, a probabilidade de não ocorrências de eventos neste intervalo é dado por:

$f(0) = P(T = 0) = [(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}] / 0! = e^{-\lambda t}$

Se a variável aleatória contínua T representar o tempo passado entre a ocorrência de dois e-ventos de Poisson, então a probabilidade da não ocorrência no tempo "t" é igual a probabilidade de que o tempo T entre ocorrências seja maior que "t", isto é:

$P(T > t) = e^{-\lambda t}$

Tem-se ainda que:

$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Que conforme já visto é a função acumulada da variável aleatória exponencial de parâmetro λ, isto é:

$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

1.6. A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Um dos principais modelos de distribuição contínua é a curva normal ou de Gauss. Sua importância para a Estatística (prática) reside no fato que muitas variáveis encontradas na natureza se distribuem de acordo com o modelo normal. Este modelo também tem uma importância teórica devido ao fato de ser uma *distribuição limite*.

Uma variável aleatória contínua X tem uma distribuição normal (ou Gaussiana) se sua função densidade de probabilidade for do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \text{ para } -\infty \leq x \leq \infty$$

1.6.1. Propriedades da distribuição normal

Se X for uma VAC com distribuição Normal, então:

Média, expectância ou valor esperado

$E(X) = \mu$, isto é, o parâmetro μ é a média da distribuição normal.

Variância

$V(X) = \sigma^2$, isto é, a variância da distribuição normal é o parâmetro σ ao quadrado.

O desvio padrão

O desvio padrão da distribuição normal é o parâmetro σ.

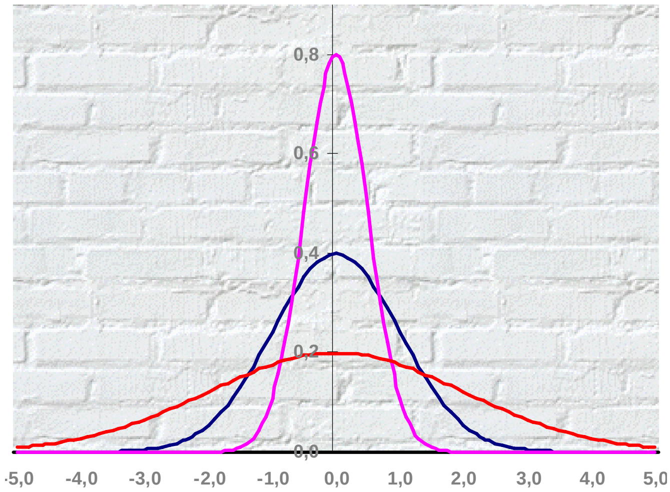
FDA da distribuição Normal

A função de distribuição (FDA) da normal reduzida é representada por:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Esta integral, e aliás como de qualquer outra normal, não pode ser avaliada pelo método tradicional (teorema fundamental do cálculo). Ela só pode ser calculada por métodos numéricos. E por isso ela é encontrada tabelada em qualquer livro texto de Probabilidade ou Estatística.

Figura 1.2 – Distribuições normais: N(0; 1/2), N(0; 1) e N(0; 2)



1.6.2. Outras propriedades

(a) Transformação linear de uma variável aleatória normal

Se X tiver uma distribuição N(μ,σ) e se Y = aX + b, então Y terá a distribuição N(aμ + b, aσ)

(b) Combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes

A combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes será uma variável aleatória normalmente distribuída.

(c) f(x) → 0 quando x → ∞ ou -∞.

(d) $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão da função f(x), isto é, são os valores onde o gráfico da função muda o sinal da curvatura.

(e) x = μ é o ponto de máximo de f(x) e este máximo vale $1/\sigma\sqrt{2\pi}$.

(f) f(x) é simétrica ao redor de x = μ , isto é: f(μ + x) = f(μ - x)

(g) Se X tem uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ se escreverá:

X : N(μ, σ)

(h) Quando μ = 0 e σ = 1, tem-se uma distribuição normal padrão ou normal reduzida. A variável normal +padrão será anotada por Z. Então Z : N(0, 1). A função densidade de probabilidade da variável aleatória Z será representada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \text{ para } -\infty \le z \le \infty$$

(i) Se X é uma N(μ, σ), então Z = (X - μ) / σ é a normal padrão ou reduzida. Isto significa que qualquer curva normal poderá ser padronizada, mediante esta transformação.

1.6.3. Tabelas

A forma de se calcular probabilidade com qualquer distribuição normal é através da tabela da normal padrão. Assim se X : N(μ, σ) então primeiro é necessário padronizar X, isto é, fazer:

Z = (X - μ) / σ.

Em seguida obter em uma tabela o valor da probabilidade, isto é, o valor:

$P(Z \le z) = \Phi(z)$

Este valor Φ(z) pode ser lido como "valor tabelado de z" e significa a probabilidade de a variável aleatória contínua Z = (X - μ) / σ assumir valores à esquerda (abaixo de) do valor particular "z".

Lembrar que qualquer tabela é construída fornecendo os valores da FDA de Z. A maioria delas fornece as probabilidades de $Z \le z$ para valores de z entre -3,09 e +3,09 e com aproximação centesimal. Algumas fornecem valores de z entre 0 e 3,09

Assim o primeiro valor tabelado é em geral $\Phi(-3{,}09) = P(Z \le -3{,}09)$ que vale 0,0000, isto é, é zero com uma aproximação de 4 decimais. O valor seguinte seria $\Phi(-3{,}08) = P(Z \le -3{,}08) = 0{,}0001$.

O último valor tabelado é, em geral, $\Phi(3{,}09) = P(Z \le 3{,}09) = 1{,}000$, pois é o valor acumulado, isto quer dizer, que até este valor tem-se a totalidade da área útil sob a curva avaliada com uma aproximação de 4 decimais.

Convém ressaltar que as tabelas sendo da FDA de Z fornecem a área à esquerda de um valor qualquer "z". No entanto, como a curva é simétrica, se quiséssemos, a área à direita de "z", basta observar que:

$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$

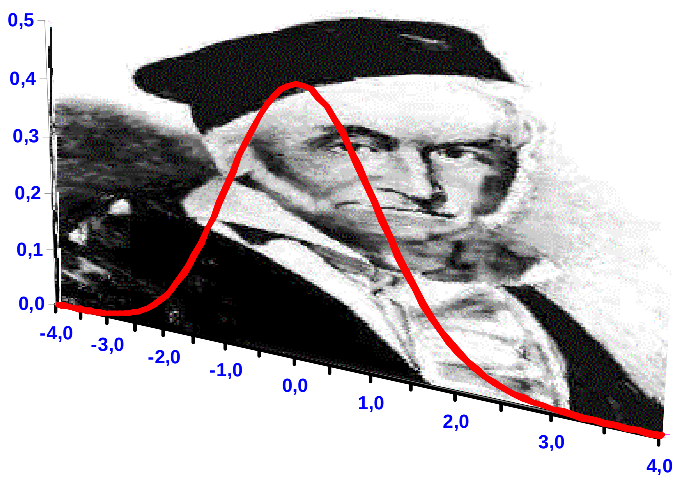


Figura 1.3 – Distribuição normal padrão - N(0; 1)

Exemplo 1.5

Seja Z uma N(0, 1). Determinar as seguintes probabilidades:

(a) $P(Z < 2{,}23)$ **(b)** $P(Z > -1{,}45)$

(c) $P(-2 < Z \leq 2)$ **(d)** $P(-1 \leq Z \leq 1)$

Solução:

(a) $P(Z < 2{,}23) = \Phi(2{,}23) = 98{,}71\%$

(b) $P(Z > -1{,}45) = 1 - P(Z \leq -1{,}45) = 1 - \Phi(-1{,}45) = 1 - 0{,}0735 = 92{,}65\%$

(c) $P(-2 < Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 95{,}44\%$

(d) $P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

Exemplo 1.6

Seja X uma VAC com distribuição N(10, 2). Determinar:

(a) $P(X < 10)$ **(b)** $P(X > 11{,}50)$

(c) $P(8 < Z \leq 12)$ **(d)** $P(6{,}08 \leq Z \leq 13{,}92)$

Solução:

Neste caso, antes de se poder procurar os valores na tabela é necessário padronizar cada valor de X, através da expressão:

$Z = (X - \mu) / \sigma = (X - 10) / 2$

(a) $P(X < 10) = P((X - 10) / 2 < (10 - 10) / 2) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 50\%$

(b) $P(X > 11{,}50) = P(Z > (11{,}50 - 10) / 2) = P(Z > 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 22{,}66\%$

(c) $P(8 < X \leq 12) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 68{,}26\%$

(d) $P(6{,}08 \leq X \leq 13{,}92) = P(-1{,}96 < Z \leq 1{,}96) = \Phi(1{,}96) - \Phi(-1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 95\%$

1.6.4. Relação entre as distribuições Binomial e Normal

Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetros “n” e “p”. Isto é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x}$$

Quando o número de provas “n” cresce (tende ao infinito) a distribuição binomial tende a uma distribuição normal de média $\mu = np$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{npq}$

Em geral admite-se que para $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, “n” já será suficientemente grande para se poder aproximar uma distribuição binomial pela normal.

No entanto, devido ao fato de se estar aproximando uma distribuição discreta, através de uma contínua, recomenda-se para se obter maior precisão, realizar uma *correção de continuidade* que consiste em transformar, por exemplo, $P(X = x)$ no intervalo $P(x - 0{,}5 < X < x + 0{,}5)$ e o mesmo em qualquer outra situação.

Exemplo 1.7

No lançamento de 30 moedas honestas, qual a probabilidade de saírem:

(a) Exatamente 12 caras?

(b) Mais de 20 caras?

Solução:

(a) A probabilidade de saírem 12 caras é dada pela distribuição binomial por:

$$P(X = 12) = \binom{30}{12}.0{,}5^{12}.0{,}5^{18} = 8{,}06\%$$

Aproximando pela normal tem-se:

$\mu = np = 30.(1/2) = 15$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 2{,}7386$

Então P(X =12) calculado pela normal com utilização da correção de continuidade será:

$P(X = 12) \cong P(11{,}5 < X < 12{,}5) = P(-1{,}28 < Z < -0{,}91) = 0{,}3997 - 0{,}3186 = 8{,}11\%$, que não é muito diferente do valor exato 8,06%.

(b) $P(X > 20) = \sum_{i=21}^{30} \binom{30}{i} . \left(\frac{1}{2}\right)^{i} . \left(\frac{1}{2}\right)^{30-i} = 2{,}14\%$

Aproximando pela normal, tem-se:

$P(X > 20{,}5) = 0{,}5000 - 0{,}4778 = 2{,}22\%$

1.7. A FUNÇÃO GAMA

A função gama é definida por uma integral imprópria e surge associada a vários problemas de Física, Engenharia e Estatística. Ela serve de base para a definição das distribuições contínuas: Student, χ^2 e F.

$$\text{Gama}(x) = \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ela apresenta algumas propriedades peculiares, como, por exemplo:

$\Gamma(x+1) = x!$

$\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

A função gama pode ser considerada uma generalização do Fatorial.

Se n é um inteiro positivo, então:

$\Gamma(n) = (n - 1)!$

E , então::

$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$

Graficamente a função Gama tem um comportamento estranho, especialmente para os números negativos devido aos pontos de descontinuidade. A Figura 1 mostra o gráfico da função Gama apenas para os números positivos que são de maior interesse.

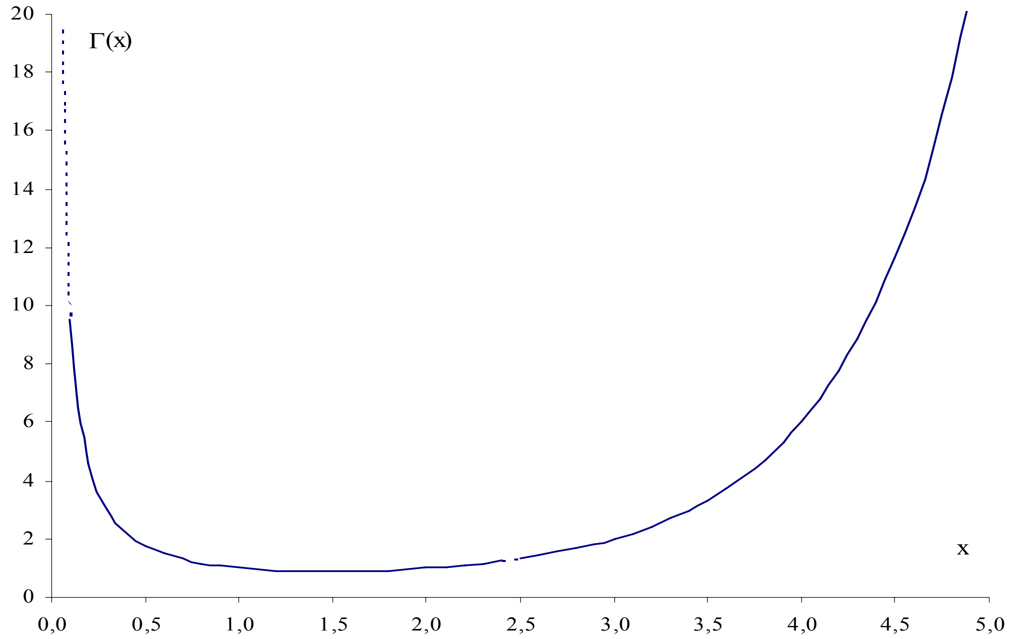


Figura 1.4 - Gráfico da função Gama no domínio dos números reais positivos

1.8. A DISTRIBUIÇÃO T (DE STUDENT)

Matematicamente a distribuição *t* de *Student* tem como único parâmetro o valor de *k* – graus de liberdade – utilizando a função Gama tanto no seu numerador como no denominador. Uma variável aleatória X tem uma distribuição **"t"** ou de **Student** se sua fdp for do tipo:

$$t_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad \nu = 1, 2, 3, ... \qquad x \in \Re$$

Para qualquer valor inteiro e positivo de ν a distribuição t assume uma forma muito parecida com a curva normal-padrão (Z) sendo que a aproximação será tanto melhor quanto maior for o valor de ν. A Figura 1.5 apresenta a forma da distribuição de Student para alguns valores de ν.

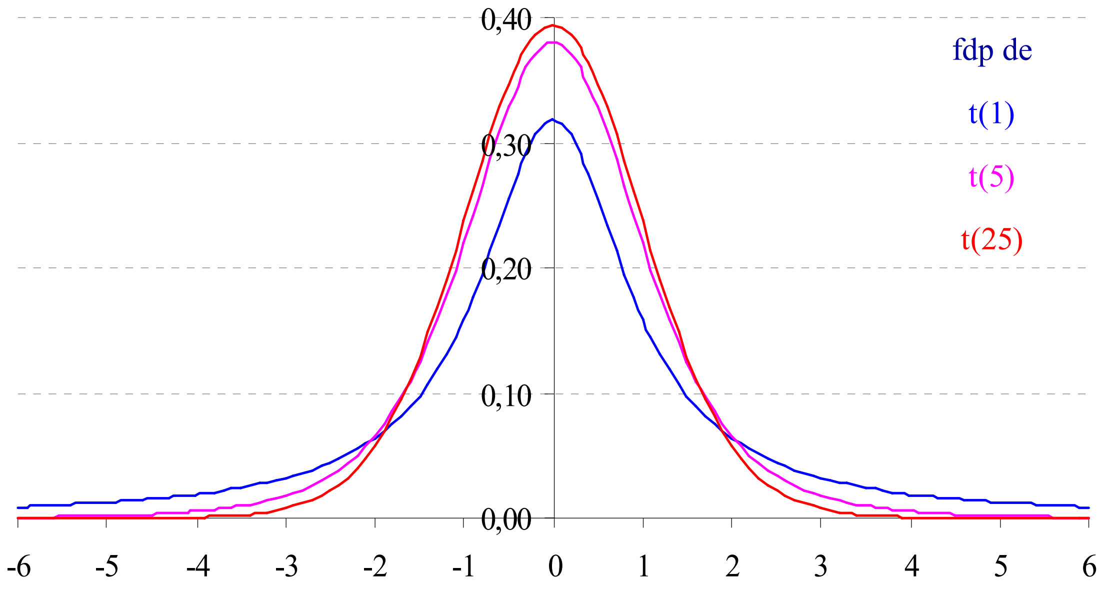


Figura 1.5 - Gráfico da distribuição t (de Student) para os gl de 1, 5 e 25

1.8.1. Propriedades da distribuição t (de Student)

Se X for uma VAC com distribuição t, então:

Média, expectância ou valor esperado

$\mu = E(X) = 0$

Variância

$V(X) = \sigma^2 = \dfrac{\upsilon}{\upsilon - 2}$ o valor ν é denominado de "graus de liberdade".

O desvio padrão

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\upsilon}{\upsilon - 2}}$

Tabelas

O que é tabelado é a função inversa (percentis), em relação a área à direita (unilateral) de cada curva (uma para cada linha), ou a soma das caudas (bilateral), isto é, a tabela retorna um valor "t" tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (unilateral) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$ (bilateral).

As duas opções podem ser colocadas em uma mesma tabela. Pode-se ler uma área (a) de cima para baixo e se ter um valor unilateral (P(T ≥ t) = α) ou ler a área (a) de baixo para cima e se ter um valor "t" tal que P(T ≥ t) = α/2.

P(t de Student ≥ valor tabelado) = α ⇔ Valores unilaterais

	0.5000	**0.2000**	**0.1000**	**0.0500**	**0.0400**	**0.0200**	**0.0100**	**0.0050**	**0.0010**
1	1.000	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	636.578
2	0.816	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	31.600
3	0.765	1.638	2.353	3.182	3.482	[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	2.612	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	[illegible]	2.896	3.355	3.833	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.587
11	0.697	1.363	[illegible]	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.437
12	0.695	1.356	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.681	3.055	3.428	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	4.073

$P(T_9 < -2{,}262) = 2{,}5\%$ ou
$P(T_9 > 2{,}262) = 2{,}5\%$

$P(|T_9| \geq 2{,}262) = 5\%$

1.9. A DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO

A distribuição Qui-quadrado está definida apenas para valores não-negativos de *x* e, assim como a *t*, depende dos graus de liberdade ν. Uma variável aleatória X tem uma distribuição **Qui-Quadrado** se sua fdp for do tipo:

$$\chi^2_\nu(x) = \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \qquad \nu = 1, 2, 3,... \qquad x \in [0;\ \infty)$$

1.9.1. Propriedades da distribuição χ^2 (qui-quadrado)

Média, expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \nu$$

Variância

$$V(X) = \sigma^2 = 2\nu$$

O valor ν é denominado de "graus de liberdade".

O desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{2\upsilon}$$

Representação gráfica

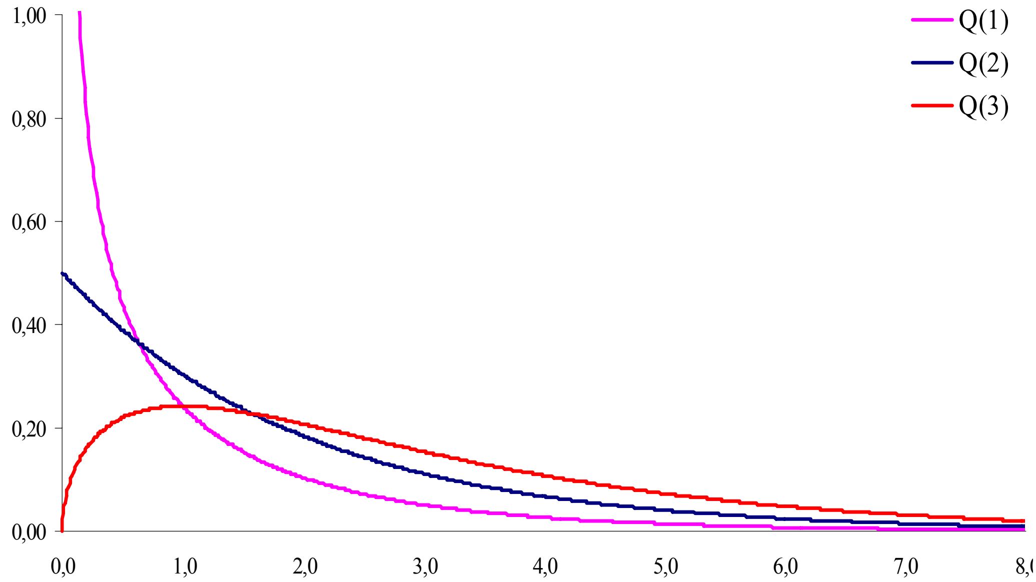


Figura 1.6 - Gráfico da distribuição χ^2 (Qui-Quadrado) para os gl de 1, 2 e 3

Tabelas

O que é tabelado é a função inversa, em relação a área à direita de cada curva (uma para cada linha), isto é, dado um valor de área na cauda direita (a), a tabela retorna um valor "x" tal que $P(\chi^2 \geq x) = \alpha$.

	0.995	**0.990**	**0.975**	**0.950**	**0.900**	**0.100**	**0.050**	**0.025**	**0.100**	**0.005**
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	2.706	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	4.605	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	[illegible]	6.251	7.815	9.348	6.251	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	[illegible]	7.779	9.488	11.143	7.779	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.14[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.832	9.236	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	10.645	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	12.017	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	13.362	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	14.684	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	15.987	25.188

$P[\chi^2_{(2)} \geq 0,211] = 90\%$

1.10. A DISTRIBUIÇÃO F (DE SNEDECOR)

Já a distribuição *F* de *Snedecor* depende de dois parâmetros denominados também de graus de liberdade. O primeiro (m) é o grau de liberdade do numerador e o segundo (n) do denominador. Na estatística ela é caracterizada como o quociente de duas variâncias e, portanto de duas distribuições qui-quadrado. Cada parâmetro da mesma forma que nos modelos anteriores é associado ao tamanho amostral menos um. Uma das possíveis representações da função densidade de probabilidade da F, em termos da função Gama, é dada por:

$$F_{m,n} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} \quad m, n = 1, 2, 3, \quad x \in [0;\infty)$$

1.10.1. Propriedades da distribuição F (de Snedecor)

Média, expectância ou valor esperado

$\mu = E(X) = \dfrac{m}{m-2}$, onde m é o grau de liberdade do numerado.

Variância

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{2m^2(m+n-2)}{m(m-2)(n-4)}$$

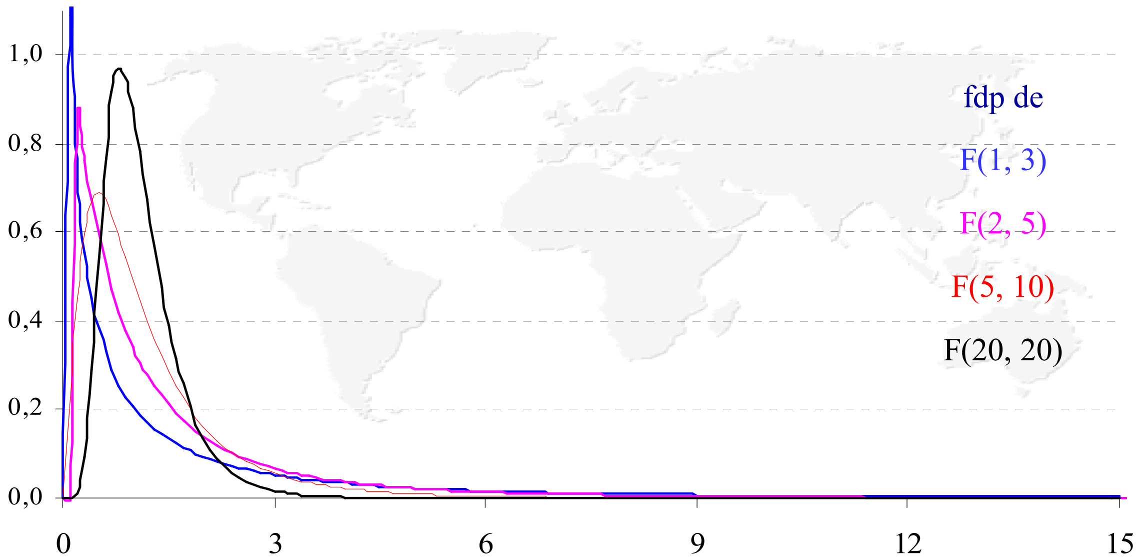


Figura 1.7 - Gráfico da distribuição F (de Snedecor)

Tabelas

O que é tabelado é a percentil 95% ou 99% - área à direita de cada curva (uma para cada par de valores – numerador, denominador) igual a 5% e 1%, isto é, "x" tal que P[F(m, n) ≥ x] = 5% ou P[F(m, n) ≥ x] = 1%.

Tabela F – Probabilidades unilaterais à direita a 5%

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	242,98	243,90	244,69	245,36	245,95	246,47
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	[illegible]	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	[illegible]	[illegible]	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3,96	3,94	3,92
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3,53	3,51	3,49
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83

P[F(5, 7) ≥ 3,97] = 5%

Tabela F – Probabilidades unilaterais à direita a 1%

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4052,18	4999,34	5403,53	5624,26	5763,96	5858,95	5928,33	5980,95	6022,40	6055,93	6083,40	6106,68	6125,77	6143,00	6156,97	6170,01
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,42	99,43	99,43	99,44
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92	26,87	26,83
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25	14,20	14,15
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9,96	9,89	9,82	9,77	9,72	9,68
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	[illegible]	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,56	7,52
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,31	6,28
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,52	5,48
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01	4,96	4,92
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,56	4,52

P[F(5, 7) ≥ 7,46] = 1%

2. PROPRIEDADES DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2.1. MÉDIA

(1) A média de uma constante é igual a própria constante.

$E(k) = k$, onde k = constante

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a média fica multiplicada por esta constante.

$E(kX) = k.E(X)$

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a média ficará igualmente somada dessa constante.

$E(X \pm k) = E(X) \pm k$

(4) A média de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias é igual a soma ou diferença das médias dessas variáveis.

$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

(5) A média do produto de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual ao produto das médias dessas variáveis.

$E(X.Y) = E(X).E(Y)$

2.2. VARIÂNCIA

(1) A variância de uma constante é nula

$V(k) = 0$

(2) Se multiplicarmos os valores de uma variável aleatória por uma constante, a variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.

$V(kX) = k^2.V(X)$

(3) Se os valores de uma variável aleatória forem somados a uma constante a variância não se altera.

$V(X \pm k) = V(X)$

(4) A variância de uma soma ou diferença de duas variáveis aleatórias **independentes** é igual a soma das variâncias dessas variáveis.

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

2.3. A MEDIANA E A MODA

A **mediana** de uma variável aleatória é o valor que divide a distribuição em duas partes eqüi-prováveis. Será representada por **md.** Então:

$P(X < md) = P(X > md) = 0{,}50$.

Este ponto sempre existe se a variável é contínua, onde a mediana pode ser definida como sendo o ponto tal que $F(md) = 0{,}50$. No caso discreto pode haver todo um intervalo que satisfaz a relação acima, convenciona-se em geral adotar o ponto médio deste intervalo. Pode-se ainda, neste caso, definir a mediana como sendo o menor valor para o qual $F(md) > 0{,}5$.

A **moda** é o(s) ponto(s) de maior probabilidade, no caso discreto, ou maior densidade de probabilidade no caso contínuo. É representada por **mo**.

2.4. DESIGUALDADES DE TCHEBYCHEFF E CAMP-MEIDELL

Pode-se demonstrar que, para qualquer distribuição de probabilidade que possua média μ e desvio padrão σ, tem-se, para qualquer número "$k > 1$":

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$ (Desigualdade de **Tchebycheff**, Tchebichev ou Chebyshev, 1821 - 1894), ou de forma equivalente

$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$

Se a distribuição for unimodal e simétrica, então:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{4}{9k^2}$ (Desigualdade de **Camp-Meidell**)

Estas desigualdades fornecem as probabilidades de que os valores de uma variável aleatória (qualquer) esteja num intervalo simétrico em torno da média de amplitude igual a 2k desvios padrões. Assim se $k = 2$, por exemplo, a desigualdade de Tchebycheff estabelece que o percentual de valores da variável aleatória que está compreendida no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é de pelo menos $1 - 1/4 = 75\%$. Conforme visto pela normal este percentual vale exatamente 95,44%. Mas como a normal é simétrica e unimodal, neste caso, um resultado mais próximo é dado pela desigualdade de Camp-Meidell, isto é, $1 - 4/9k^2 = 1 - 1/9 = 88{,}89\%$.

Exemplo 2.1

Compare o limite superior da probabilidade $P[(X - \mu| \geq 2\sigma)]$, obtida pela desigualdade de T-chebycheff, com a probabilidade exata se X for uniformemente distribuída sobre (-1, 3).

Solução:

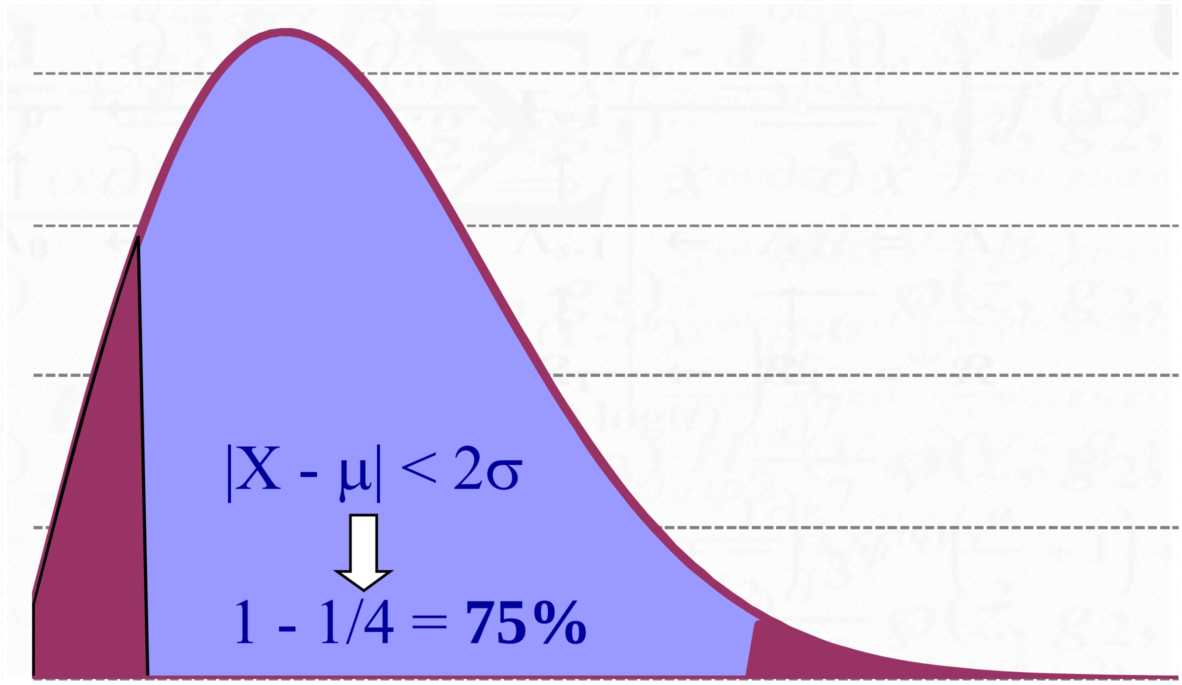
Para uma distribuição uniforme tem-se $\mu = (a + b) / 2 = (-1 + 3) / 2 = 1$ e

$V(X) = (b - a)^2 / 12 = 4/3$

Então: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$ é a probabilidade exata.

Por Tchebycheff, teríamos:

$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - 1| \geq 4\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq 1/4$.



2.5. O TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Sejam X_1, X_2, ... Uma seqüência de variáveis aleatórias iid (independentes e identicamente distribuídas) com $E(X_i^2) < \infty$

Sejam $\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$.

Então para todos os valores **a** e **b** tais que $a \leq b$, tem-se:

$$P\left[a \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right] \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

3. EXERCÍCIOS

(78) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$f(x) = 3x^2$ se $0 < x < 1$

$= 0$ caso contrário.

Calcular a probabilidade dessa variável assumir um valor maior ou igual a 1/3.

(79) Sendo $f(x) = kx^3$ a densidade de uma variável aleatória contínua no intervalo $0 < x < 1$, determine o valor de "k".

(80) Uma variável aleatória contínua X é definida pela seguinte função densidade:

$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$ para $0 \le x < 2$. Determinar:

(80.1) A média **(80.2)** A variância

(81) Uma variável aleatória contínua tem a seguinte fdp: $f(x) = \begin{cases} 2kx & \text{se } 0 \le x < 3; \\ kx & \text{se } 3 \le x < 5; \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Determinar o valor de k, a média, a mediana e a variância da variável aleatória.

(82) Uma variável X é uniformemente distribuída no intervalo [10, 20]. Determine a expectância e a variância de X e calcule ainda a $P(12,31 < X < 16,50)$.

(83) Suponha que X seja uniformemente distribuída entre $[-\alpha, \alpha]$, onde $\alpha > 0$. Determinar o valor de α de modo que as seguintes relações estejam satisfeitas:

(83.1) $P(X > 1) = 1/3$ **(83.2)** $P(X < 1/2) = 0,7$

(84) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1000 horas) que é considerado uma variável aleatória com fdp dada por:

$f(x) = e^{-x}$, $x > 0$

$= 0$, caso contrário.

Suponha ainda que o custo de fabricação de um item seja 2,00 um e o preço de venda seja 5,00 um. O fabricante garante total devolução se $x \le 0,8$. Qual o lucro esperado por item?

(85) Uma lâmpada tem duração de acordo com a seguinte densidade de probabilidade:

$f(t) = 0,001e^{-0,001t}$ para $t > 0$

$= 0$ caso contrário

Determinar

(85.1) A probabilidade de que uma lâmpada dure mais do que 1200 horas.

(85.2) A probabilidade de que uma lâmpada dure menos do que sua duração média.

(85.3) A duração mediana.

(86) Se as interrupções no suprimento de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com a média de uma por mês (quatro semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de:

(86.1) Menos de uma semana. **(86.2)** Mais de três semanas.

(87) Se X : N(10, 2) Calcular:

(87.1) $P(8 < X < 10)$ **(87.2)** $P(9 \leq X \leq 12)$ **(87.3)** $P(X > 10)$ **(87.4)** $P(X < 8$ ou $X > 11)$

(88) Se X tem uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10, determine:

(88.1) $P(X < 115)$ **(88.2)** $P(X \geq 80)$ **(88.3)** $P(X > 100)$

(88.4) O valor de "a" tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0{,}9544$

(89) Na distribuição $N(\mu; \sigma)$, encontre:

(89.1) $P(X < \mu + 2\sigma)$ **(89.2)** $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(89.3) O número "a", tal que $P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 0{,}90$

(89.4) O número "a", tal que $P(X > a) = 0{,}95$

(90) A alturas de 10000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal com média de 170 cm e desvio padrão de 5 cm.

(90.1) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 1,65 m?

(90.2) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que conterá 75% das alturas dos alunos?

(91) As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média de 500 e desvio padrão de 50. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

(92) O número de pedidos de compra de certo produto que uma cia recebe por semana distribui-se normalmente, com média 125 e desvio padrão de 25. Se em uma dada semana o estoque disponível é de 150 unidades, qual é a probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos? Qual deveria ser o estoque para se tivesse 99% de probabilidade de que todos os pedidos fossem atendidos?

(93) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3, com desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

(93.1) Qual a percentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

(93.2) Qual a percentagem de garrafas em que o volume do líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(93.3) O que acontecerá com a percentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

(94) O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma variável aleatória com distribuição normal de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro do anel diferir da média de mais do que 0,03 cm, ele é vendido por R$ 5,00, caso contrário, é vendido por R$ 10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

(95) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos D_1 e D_2, tenham distribuições N(42; 6) e N(45; 3), respectivamente. Se o aparelho é para ser utilizado por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 51 horas?

(96) A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de pesos para cada classificação?

(97) Uma distribuição normal tem desvio padrão igual a 5 e é tal que 1,5% dos valores estão abaixo de 35. Determine sua média.

(98) Numa prova de vestibular com 50 questões objetivas de 5 alternativas cada, qual a probabilidade de que um candidato, que responde ao acaso (chuta) todas as questões, acerte mais do 15 questões?

(99) Um dado equilibrado é lançado 120 vezes. Determinar a probabilidade que a face 4 (quatro) apareça:

(99.1) 18 vezes ou menos

(99.2) Mais de 14 vezes

(100) No lançamento de 30 moedas equilibradas, qual a probabilidade de saírem:

(100.1) Exatamente 12 caras?

(100.2) Mais de 20 caras?

(101) Uma variável aleatória tem média igual a 5 e desvio padrão igual a 3. Determine:

(101.1) $P(|X - 5| \leq 3)$

(101.2) h tal que $P(|X - 5| > h) = 0{,}01$

(101.3) P(-1 ≤ X ≤ 11) **(101.4)** P(|X - 5| ≤ 7,5)

(102) Supondo que a média de uma variável aleatória X seja igual a 4 e o desvio padrão igual a 2, determine:

(102.1) A probabilidade de X estar no intervalo de **0** a **8**. **(102.2)** Qual o valor mínimo de P(-2 ≤ X ≤ 10).

4. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

(78) $P(X > 1/3) = 26/27$

(79) $k = 4$

(80) **(80.1)** $E(X) = 1$ **(80.2)** $\sigma^2 = 0{,}60$

(81) 1/17; 2,98; 2,92 e 1,50

(82) $E(X) = 15$ $V(X) = 8{,}33$ $P(12{,}31 < X < 16{,}50) = 41{,}90\%$

(83) **(83.1)** 3 **(83.2)** 5/4

(84) $5e^{-0,8} - 2 = 0{,}25$ um

(85) **(85.1)** 30,12% **(85.2)** 63,21%. **(85.3)**

(86) **(86.1)** 22,12% **(86.2)** 47,24%

(87) **(87.1)** 34,13% **(87.2)** 53,28% **(87.3)** 50% **(87.4)** 46,72%

(88) **(88.1)** 93,32% **(88.2)** 97,72% **(88.3)** 50% **(88.4)** $a = 20$

(89) **(89.1)** 97,72% **(89.2)** 68,26% **(89.3)** 1,645 **(89.4)** $a = \mu - 1{,}645\sigma$

(90) **(90.1)** 8413 **(90.2)** (164,25; 175,75)

(91) 0,0228 = 2,28%

(92) **(92.1)** 84,13% **(92.2)** 184

(93) **(93.1)** 15,87% **(93.2)** 95,44% **(93.3)** Não se altera

(94) 9,33 u.m.

(95) $P(D_1 > 45) = 30{,}85\%$ $P(D_1 > 51) = 6{,}68\%$

$P(D_2 > 45) = 50\%$ $P(D_2 > 51) = 2{,}28\%$

(96) 4,33 kg; 5,54 kg e 6,02 kg

(97) 45,85

(98) 2,62%

(99) **(99.1)** 35,57% **(99.2)** 91,15%

(100) **(100.1)** 8,11% (8,06% exato) **(100.1)** 2,22% (2,14% exato)

(101) **(101.1)** Zero **(101.2)** $h = 30$ **(101.3)** 75% **(101.4)** 84%

(102) **(102.1)** 3/4 = 75% **(102.2)** 8/9 = 88,89%

5. REFERÊNCIAS

BUSSAB, Wilton O, MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 3ª ed. São Paulo: Atual, 1986.

COSTA NETO, Pedro Luís de Oliveira, CYMBALISTA, Melvin. *Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.* São Paulo: Editora Edgard Blücher , 1977.

FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (vol. 1)*. John New York: Wiley & Sons, 1968. 509 p.

HAZZAN, Samuel. *Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidades*. São Paulo: Atual, 1977.

HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Campus e Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria e Problemas de Probabilidade*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 225 p.

MARKLAND, Robert E., SWEIGART, James R. *Quantitative Methods: Applications to Managerial Decision Making*. New York: John Wiley & Sons, 1987. 827p.

MASON, Robert D., DOUGLAS, Lind A. *Statistical Techniques in Business And Economics*. IRWIN, Boston, 1990.

MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à Estatística*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

MILLER, Charles D., HEEREN, Vern E., HORNSBY Jr., E. John. *Mathematical Ideas*. USA: Harper Collins Publishers, 1990.

The Statistics Problem Solver. Research and Education Association, Piscataway, New Jersey, 1993.

ROTHENBERG, Ronald I. *Probability and Statistics*. Orlando (FL), Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, 1991.

ROSS, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Orlando (FL): Academic Press, 1985, 502 p.